23/02/20.

Terminale S : TD intégration.

Exercice 35 :

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminons l'expression de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x}\right) dx.$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n \times x - x^n}{1+x}\,dx.$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,dx.$$

Or $0 \leq x \leq 1$. donc $x^n \geq 0$.

$0+1 \leq x+1 \leq 2$. donc $x+1 \geq 0$.

d'autre part :

$0 \leq x \leq 1$

$0-1 \leq x-1 \leq 1-1$

$-1 \leq x-1 \leq 0$.

Par produit et quotient, nous pouvons dire que :

$$\frac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,dx \leq 0$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

En d'autres termes, (u_n) est décroissante.

4)b) Démontrons dans un premier temps que (u_n) est positive.

Soit $x \in [0;1]$, ainsi il est trivial que $x^n \geq 0$.
de même $1+x \geq 0$ } déjà explicités dans la quest° précédente.

Par quotient, $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$. d'où :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \geq 0.$$

$$u_n \geq 0.$$

Or (u_n) est décroissante donc (u_n) converge vers une limite $l \geq 0$.

5) Supposons que $l \neq 0$.

Or $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x+1} = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \neq 0.$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$

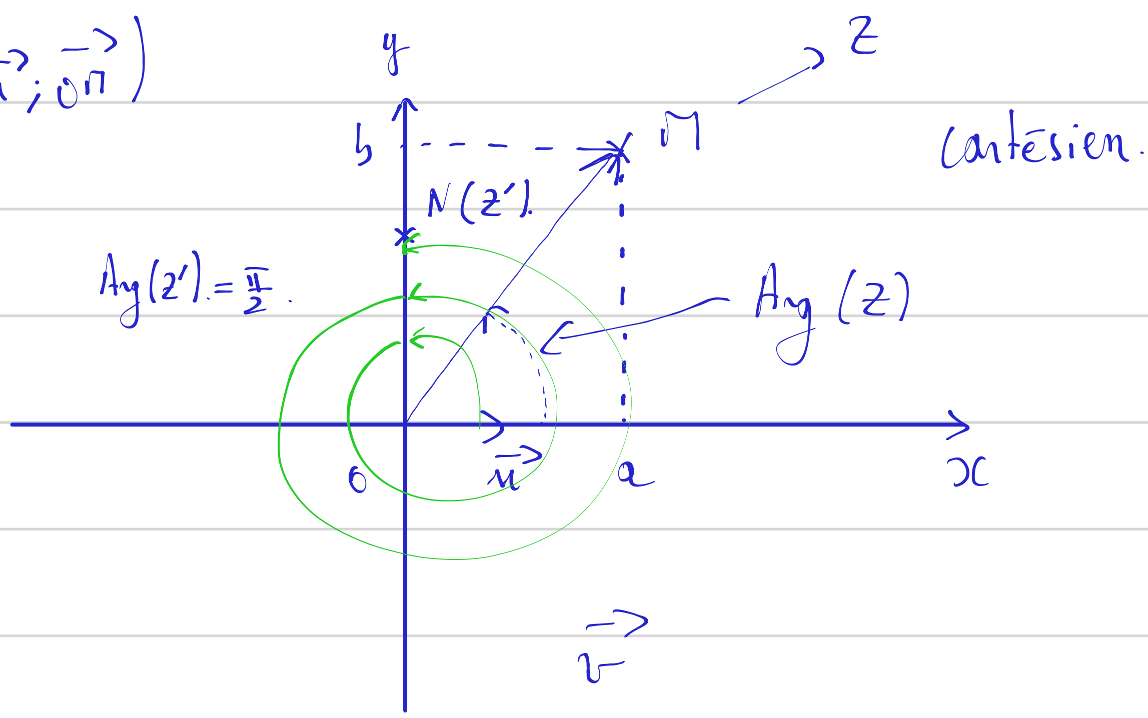
Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} + u_n = 2l \neq 0.$

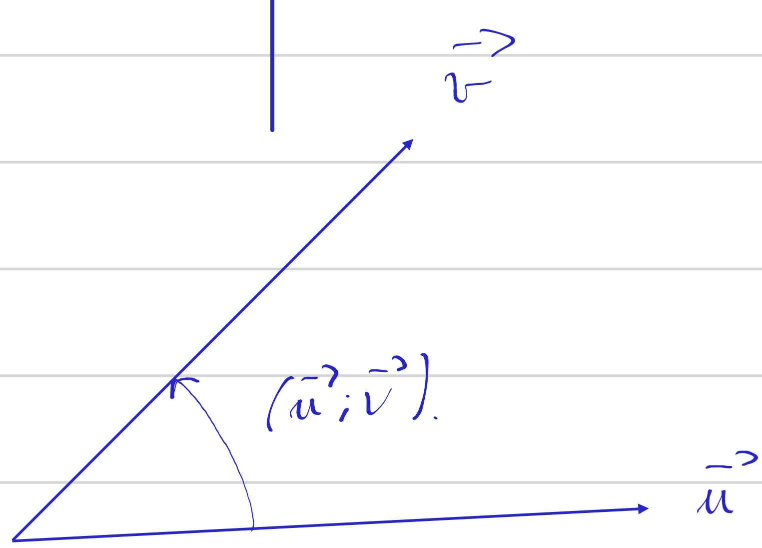
D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. ce qui est impossible car $l \neq 0$.

On en déduit que l'hypothèse de départ est fausse donc $l = 0$.

$\boxed{\text{Complexe partie2.}}$

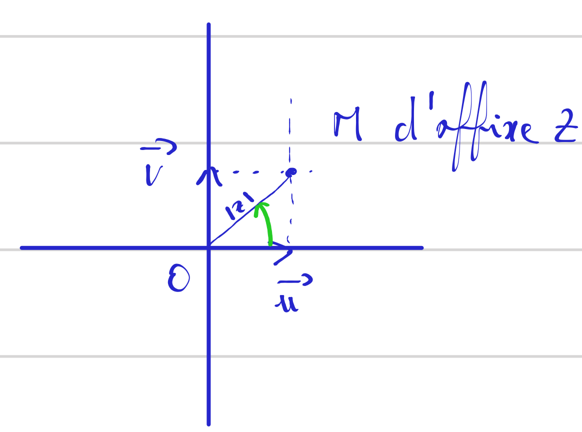
$Arg(z) = (\vec{u}\,;\vec{OM})$





Voici un nombre complexe: $z = 1 + i \times 1$

$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.



$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d'où $\theta = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Arg(z).

forme algébrique

$|z|$ Arg(z)

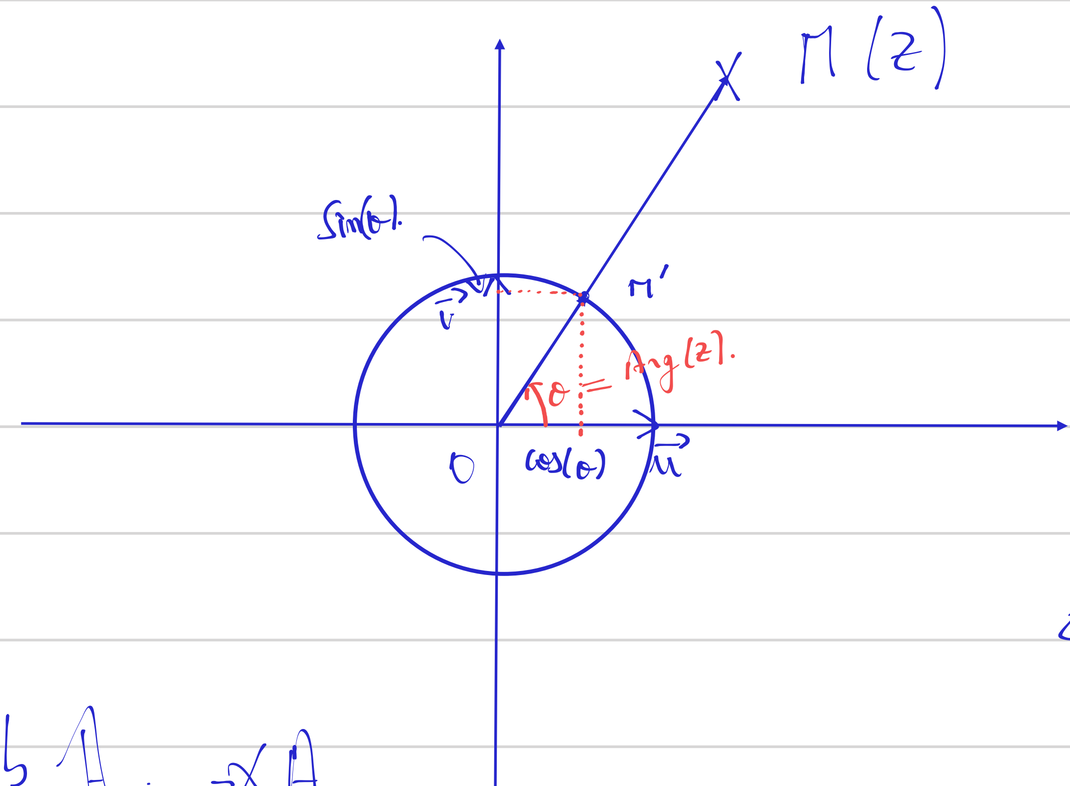
$M = B$

$z_M = z_B$.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe:

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors z admet nécessairement une forme trigo:

$$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta).$$



$\vec{OM} = k \times \vec{OM'}$.

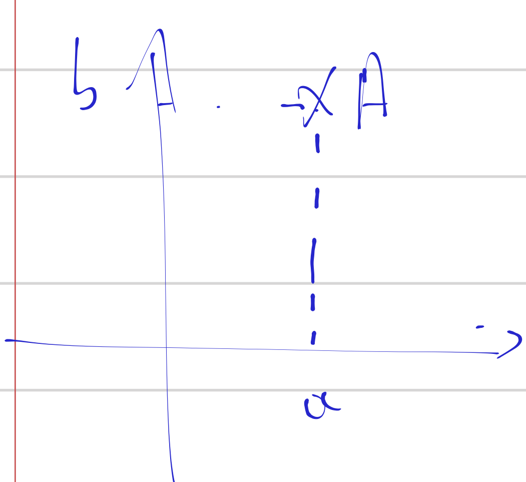
$\vec{OM} = OM \times \vec{OM'}$.

$z_{\vec{OM}} = |z| \times z_{\vec{OM'}}$.

$z - \underbrace{z_O}_{=0} = |z| \times (z_{M'} - \underbrace{z_O}_{=0})$.

$z = |z| \times (z_{M'})$

$z = |z| \times (\cos\theta + i \sin\theta)$.



$z_A = a + ib$.

$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$

$\cos(2) + i\sin(2) = e^{2i}$.

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b). \qquad e^{a+b} = e^{a} \times e^{b}.$$

$$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}. \qquad e^{a-b} = \frac{e^{a}}{e^{b}}.$$

$$\exp(a \times n) = (\exp(a))^{n}. \qquad e^{a \times n} = (e^{a})^{n}.$$

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^{a}}.$$

Démonstration des propriétés sur les arguments :

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe d'argument θ et de module $|z|$.

* $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$.

Démonstration :

Soit $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. $\qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \ \cos(-\theta) = \cos(\theta)$.

alors $\bar{z} = |z|(\cos\theta - i\sin\theta)$. $\qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \ \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.

$\bar{z} = |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$.

Ainsi $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = -\theta = -\mathrm{Arg}(z)$.

* $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$.

Soit $z = |z|e^{i\theta}$ $\qquad \mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(|z|e^{i\theta} \times |z'|e^{i\theta'})$.

$z' = |z'|e^{i\theta'}$

$= \mathrm{Arg}(|z| \times |z'| \times e^{i\theta + i\theta'})$.

$z = -2e^{i\theta}$ $\qquad = \mathrm{Arg}(|z| \times |z'| \times e^{i(\theta+\theta')})$.

$= 2 \times (-1) \times e^{i\theta}$

$= \theta + \theta'$

$= 2 \times e^{i\pi} \times e^{i\theta}$.

$= 2 e^{i\pi + i\theta} = 2 e^{i(\pi+\theta)}$.

$= \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$.

$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$

$= -1 + i \times 0$.

$= -1$.

$\ast$ $\text{Arg}(z^n) = n \times \text{Arg}(z)$. $n \in \mathbb{N}$.

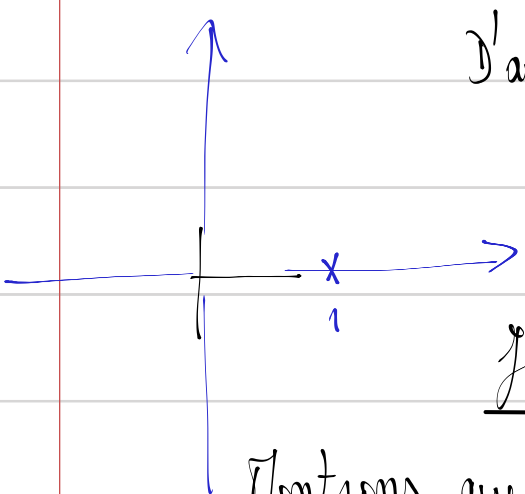
Démontrons cette proposition par récurrence :

<u>Initialisation</u> : au rang $n = 0$:

D'une part : $\text{Arg}(z^0) = \text{Arg}(1) = 0$.

D'autre part : $0 \times \text{Arg}(z) = 0$.

Donc la proposition est initialisée.



<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\text{Arg}(z^n) = n \,\text{Arg}(z)$

Montrons que : $\text{Arg}(z^{n+1}) = (n+1) \times \text{Arg}(z)$.

Par hypothèse de récurrence : $\text{Arg}(z^n) = n \,\text{Arg}(z)$.

$+ \text{Arg}(z)$

$\text{Arg}(z \times z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$

$\text{Arg}(z^n) + \text{Arg}(z) = n \,\text{Arg}(z) + \text{Arg}(z)$.

$\text{Arg}(z^n \times z) = (n+1)\,\text{Arg}(z)$.

$\text{Arg}(z^{n+1}) = (n+1)\,\text{Arg}(z)$.

CCL : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Arg}(z^n) = n \times \text{Arg}(z)$.

$\ast$ $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z)$.

Soit $z = |z| e^{i\theta}$ Alors : $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = \text{Arg}\left(\frac{1}{|z| e^{i\theta}}\right)$

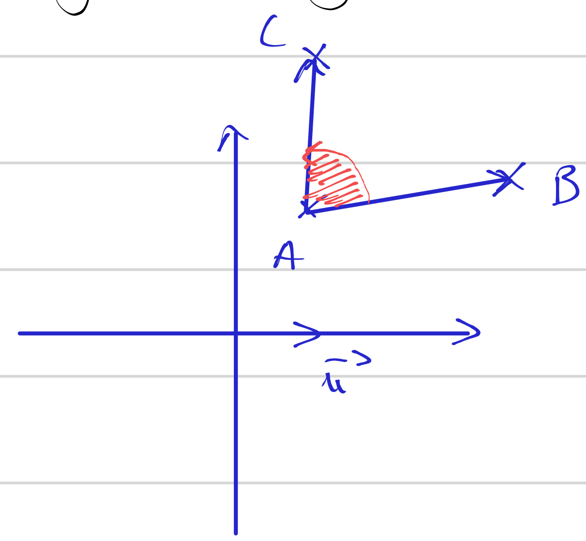
$= \text{Arg}\left(\frac{1}{|z|} \times e^{i \times (-\theta)}\right) = -\theta = -\text{Arg}(z)$.

$$* \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z')$$

On a : $$\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \mathrm{Arg}\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z'}\right).$$

$$= \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z').$$

$$* \quad (\vec{AB} ; \vec{AC}) = \mathrm{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right).$$



$$(\vec{AB} ; \vec{AC}) = (\vec{AB} ; \vec{u}) + (\vec{u} ; \vec{AC}).$$

$$= -(\vec{u} ; \vec{AB}) + (\vec{u} ; \vec{AC}).$$

$$= -\mathrm{Arg}(z_{\vec{AB}}) + \mathrm{Arg}(z_{\vec{AC}})$$

$$= \mathrm{Arg}(z_{\vec{AC}}) - \mathrm{Arg}(z_{\vec{AB}}).$$

$$= \mathrm{Arg}\left(\frac{z_{\vec{AC}}}{z_{\vec{AB}}}\right).$$

$$= \mathrm{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \mathrm{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right).$$