PRODUIT SCALAIRE ET GEOMETRIE REPEREE

Table des matières

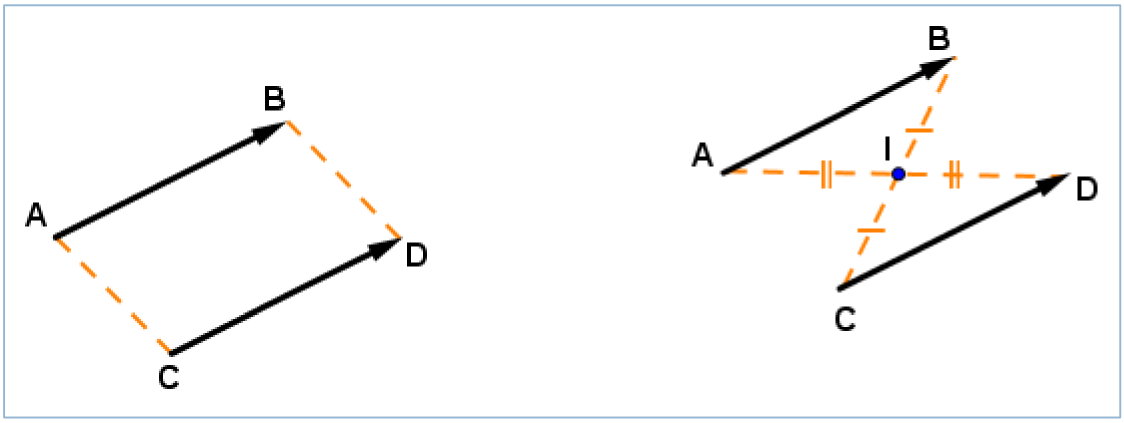
I. RAPPELS SUR LES VECTEURS

1. Définition

Un vecteur noté $\vec{u}$ ou bien $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- Une direction (celle de la droite (AB)).
- Un sens (de A vers B).
- Une longueur notée $\|\vec{u}\|$ ou bien $\|\overrightarrow{AB}\|$ également appelée norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux est équivalent à dire que le quadrilatère $AB\boldsymbol{DC}$ est un parallélogramme.

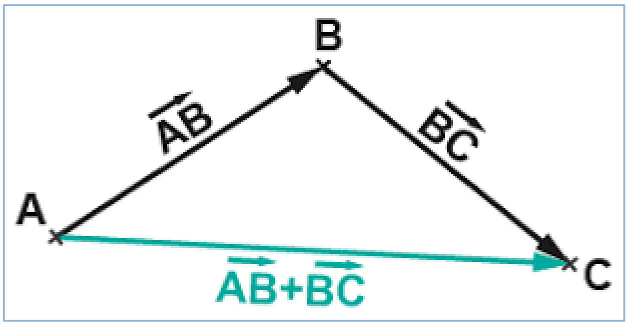


2. Opérations sur les vecteurs

1. Somme de deux vecteurs

La somme de deux vecteurs est définie par la relation de Chasles. Ainsi pour tout point B du plan, on a :

$$\overrightarrow{\mathbf{AC}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}}$$

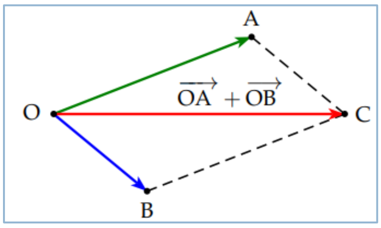


Définition :

Inégalité triangulaire :

$$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$$

Construction de la somme de deux vecteurs de même origine. On trace un parallélogramme, afin de reporter le deuxième vecteur permettant d'appliquer la relation de Chasles :



Propriété :

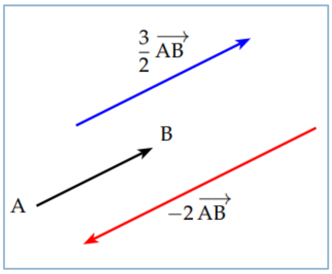
La somme de deux vecteurs est :

- Commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Associative : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

- Elément neutre $\vec{0}$: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
- Opposé $-\vec{u}$: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

2. Multiplication par un scalaire

Lorsqu'on multiplie un vecteur par un réel k, appelé scalaire, le vecteur ainsi formé $k\vec{u}$ est tel que :



- Sa longueur est multiplié par $|k|$.
- Si $k>0$ son sens est inchangé.
- Si $k<0$ son sens est inversé.
- Si $k=0$, on a $0\times\vec{u}=\vec{0}$.

Propriété :

La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition de deux vecteurs ou la somme de deux réels :

- $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$.
- $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{v}$.

3. Colinéarité de deux vecteurs

Définition :

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si et seulement si, il existe un réel k tel que : $\vec{v}=k\times\vec{u}$.

Remarque :

Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur car $\vec{0}=0\times\vec{u}$

Propriété :

La colinéarité permet de montrer le parallélisme et l'alignement de points :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\Leftrightarrow (AB)//(CD)$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ les points A, B, C sont alignés.

Exercice d'application n°1 :

Soit ABC un triangle, E, I et F tels que :

- $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Après avoir fait un dessin, démontrer que les points I, E et F sont alignés.

4. Géométrie analytique

Propriété :

Mis à part les calculs de distance, qui exige un repère orthonormé, les formules suivantes sont valables dans tout repère :

- Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vérifient :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

- Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, les coordonnées du milieu I de $[AB]$ vérifient :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

- Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

- Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur $\vec{u}(x; y)$ et la distance entre deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ vérifient :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2}$

Exercice d'application n°2 :

Soient $A(1; 4)$ et $B(-5; 2)$.

1- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, du milieu I du segment $[AB]$ et la longueur de AB
2- On donne $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(3; 4)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

II. PRODUIT SCALAIRE

1. Définition

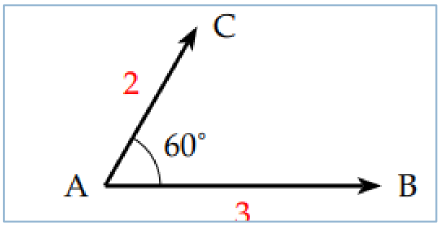
Définition :

On appelle le produit scalaire de deux vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'unique réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

Exercice d'application n°3 :

On donne la figure suivante :



Calculer le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2. Propriété

Propriété :

Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique :

- Symétrie : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

- Bilinéarité pour tous réels a et b :

  $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $(a\vec{u}).(b\vec{v}) = ab \times (\vec{u}.\vec{v})$

Remarque :

Ces propriétés permettent d'effectuer des opérations sur le produit scalaire comme le produit et la somme de quantités algébriques. C'est une sorte de distributivité.

Propriété :

On a les propriétés suivantes :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$**

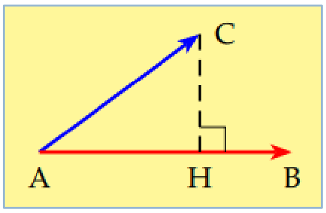
Remarque :

On écrit : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Propriété :

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs, non nuls, de même origine. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$



Démonstration :

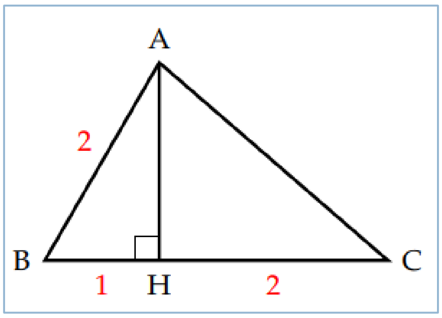
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}$$

Or, par construction, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux. Donc leur produit scalaire vaut 0 : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = 0$. On en déduit :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$

Exercice d'application n°4 :

En utilisant les renseignements de la figure, calculer le produit scalaire suivant : $\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}\right).\overrightarrow{AB}$.



3. Autres définitions

1. Définition par la norme

Définition :

Le produit sclaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Démonstration :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$; ainsi on obtient :

$\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2$; on isole $2\vec{u}.\vec{v}$:

$2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$; on divise les deux membres par 2 :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Exercice d'application n°5 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que : $AB = 4$; $BC = 3$; $AC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

2. Définition analytique

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ est donné par la relation :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration :

Cette définition est équivalente à la définition par la norme. On rappelle également que $(\vec{u}+\vec{v})$ a pour coordonnées $(x+x'; y+y')$ et que $\|\vec{u}\|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$

Par définition on a :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$; on applique la formule de la norme d'un vecteur :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[(x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2+y^2) - (x'^2+y'^2)]$; on développe et on réduit :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2)$;

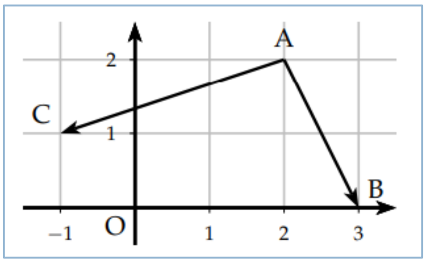
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(2xx' + 2yy')$; on factorise par 2 :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2} \times 2(xx' + yy')$; on simplifie par 2 :

$$\vec{u}.\vec{v} = \mathrm{xx}' + yy'$$

Exercice d'application n°6 :

On donne la figure suivante :



Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

4. Relation d'Al-Kashi

Cette relation a pour but de déterminer une relation entre les trois longueurs d'un triangle, il s'agit en réalité de la généralisation du théorème de Pythagore valable pour un triangle rectangle à tout type de triangle.

Théorème :

Soit un triangle ABC. On a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$

Avec, a, b et c les longueurs des côtés opposés respectivement aux points A, B et C, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\hat{A})$$

Remarque :

Nous remarquons bien que si l'angle $\hat{A}$ est droit, en d'autres termes, s'il vaut $90°$, on a $\cos(\hat{A}) = 0$ et on retombe sur le théorème de Pythagore étudié en quatrième :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

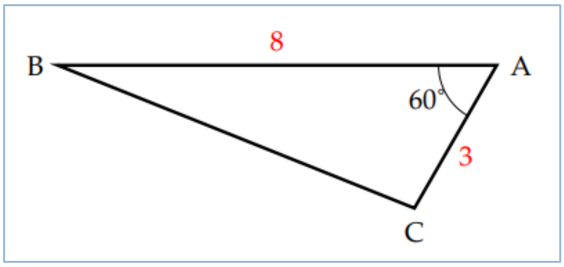
Démonstration :

On part de la relation :

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$$
$$BC^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$$
$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos(\hat{A})$$

Exercice d'application n°7 :

Déterminer la longueur de BC et les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ du triangle ci-dessous :



5. Ensemble de points

Théorème :

Soient deux points A et B et leur milieu I, pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Démonstration :

On introduit le point I dans le produit scalaire :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) - IA^2$; Or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$ car I est le milieu du segment $[AB]$. Et $IA = \frac{1}{2}AB$:

$$= MI^2 - \frac{1}{4} \times AB^2$$

Exercice d'application n°8 :

Déterminer l'ensemble (E) des points M tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 7$ et $AB = 6$.

Propriété :

Un cercle de diamètre $[AB]$ est caractérisé par $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration :

En effet, un point M du cercle de diamètre $[AB]$ de milieu I est tel que : $MI^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2$ donc d'après le théorème précédent :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$

III. GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

1. Equation cartésienne et equation réduite

Définition :

Une droite est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.

Remarque :

La droite (AB) est définie par le point A et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Théorème :

Toute droite d du plan est déterminée par une équation de la forme :

$$d : ax + by + c = 0$$

On précise que a et b sont des réels. Un vecteur directeur de la droite (AB) est alors $\vec{u}(-b; a)$.

Exercice d'application n°8 :

Soit d une droite définie par les points $A(2; 3)$ et $\vec{u}(-2; 1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

Théorème :

Toute droite d, non verticale, admet une équation réduite de la forme :

$$d : y = mx + p$$

On précise que $\vec{u}(1; m)$ est vecteur directeur de d.

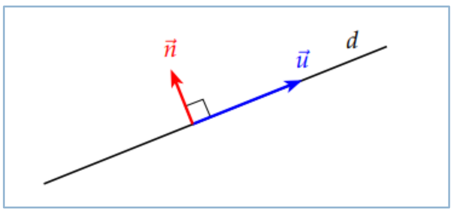
Exercice d'application n°9 :

Voici l'équation cartésienne d'une droite : $d : x + 2y - 8 = 0$. Déterminer l'équation réduite de cette droite.

2. Vecteur normal à une droite

Définition :

Un vecteur normal $\vec{n}$ à une droite d est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d. On a alors : $\vec{n}.\vec{u} = 0$.



Remarque :

Si $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de d alors il est normal à tout vecteur directeur de d.

Théorème :

Dans un repère orthonormé :

- Si $d : ax + by + c = 0$, alors $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à d.

- Réciproquement, si un vecteur $\vec{n}(a;b)$, non nul, est un vecteur normal à une droite d, alors $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de d.

Remarque :

Le repère orthonormé est indispensable pour l'orthogonalité.

Démonstration :

Soit $d : ax+by+c=0$ de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$. Alors :

$\vec{n}.\vec{u} = -ab + ab = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$

Exercice d'application n°10 :

On donne la droite $d : 3x - y + 5 = 0$. Déterminer une équation de la droite Δ passant par $A(1;2)$ perpendiculaire à d.

3. Equation d'un cercle

Théorème :

Dans un repère orthonormé, l'équation cartésienne d'un cercle C de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r est de la forme :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Démonstration :

Soit $M(x;y) \in C$ de centre Ω et de rayon r donc la distance entre Ω et M reste constante et vaut r, d'où :

$$\Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Exercice d'application n°11 :

Montrer que l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

Est un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.