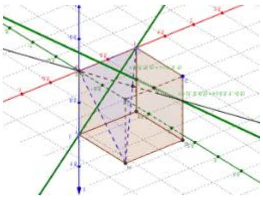
GEOMETRIE DANS L'ESPACE



Chapitre n+1

Géométrie dans l'espace 1ère partie

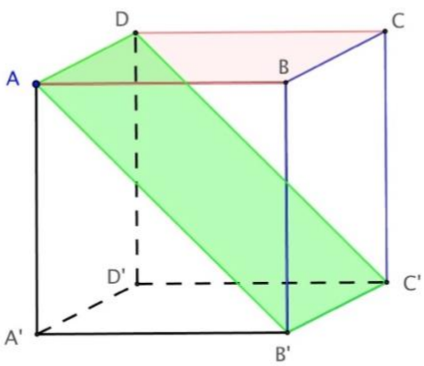
On va aborder dans ce chapitre les aspects non calculatoires mais forts indispensables à la géométrie dans l'espace.

Géométrie dans l'espace

I. POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES DANS L'ESPACE

Définition d'un plan

Un plan est caractérisé par trois points non alignés. Ici par exemple (ADB') est un plan.

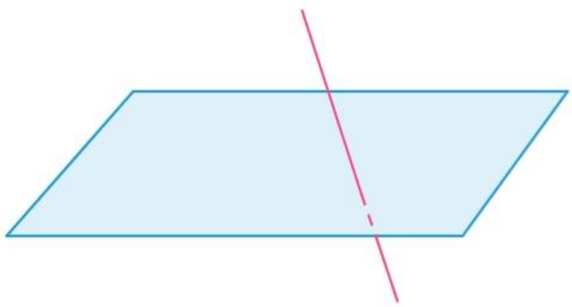


- Deux droites de l'espace peuvent être coplanaires c'est-à-dire appartenir au même plan. Exemple : (AB) et (AD).
- Deux droites peuvent être sécantes : (AA') et (AB).
- Deux droites peuvent être parallèles, c'est-à-dire que les deux droites ont la même direction dans l'espace. **Attention la définition deux droites parallèles sont deux droites qui ne se touchent pas ne fonctionne pas ici : (AB) et (B'C').**
- Deux droites peuvent être non coplanaires, c'est-à-dire ne pas être dans le même plan : (AB) et (A'D').

II. POSITION RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

- Une droite et un plan peuvent être parallèles :

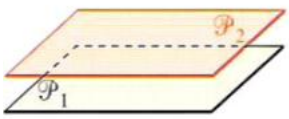
- Ou bien une droite et un plan peuvent être sécants :



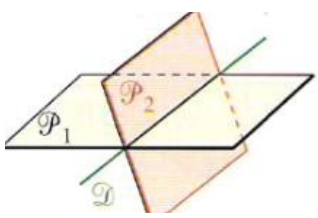
Remarquez que l'intersection du plan et de la droite est **un point.**

III. POSITION RELATIVES ENTRE DEUX PLANS

- Deux plans peuvent être parallèles :



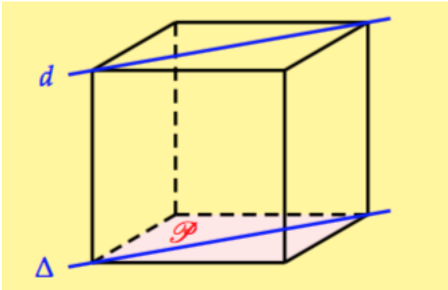
- Ou bien deux plans peuvent être sécants :



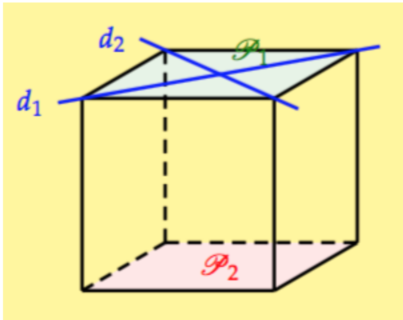
Remarquez ici que l'intersection de deux plans est une droite.

IV. PROPRIETES SUR LE PARALLELISME

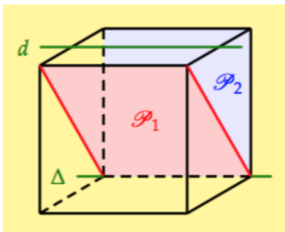
- Si une droite d est parallèle à une droite Δ d'un plan $\mathcal{P}$ alors d est parallèle à $\mathcal{P}$:



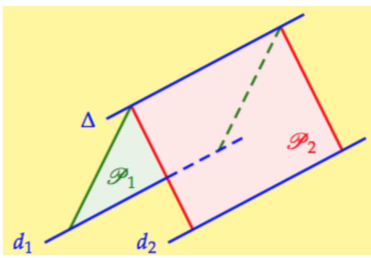
- Si deux droites d_1 et d_2 sécantes d'un plan $\mathcal{P}_1$ sont parallèles à un plan $\mathcal{P}_2$ alors $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles :



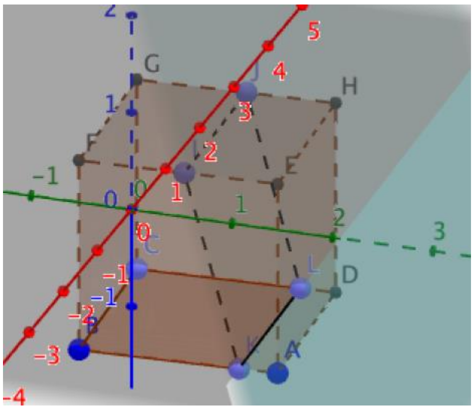
- Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à la droite engendrée par l'intersection des deux plans :



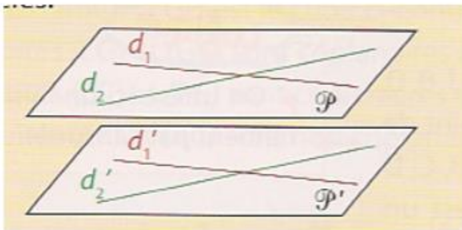
- **Théorème du toit :** Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants. Et si d_1 et d_2 deux droites de ces plans sont parallèles alors d_1 et d_2 sont parallèles à l'intersection Δ des deux plans :



- Supposons que deux plans soient parallèles. Supposons qu'un troisième plan soit sécant au premier. Alors il est sécant au deuxième et les droites d'intersections sont parallèles entre elles.

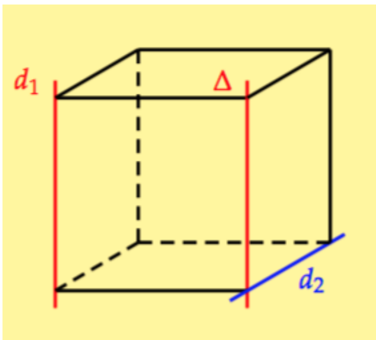


- Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes du premier plan sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre plan :



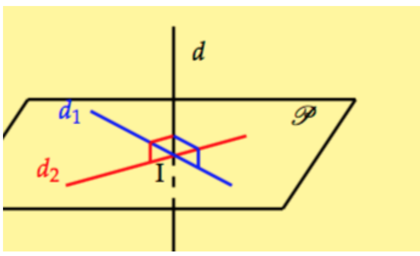
V. ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

- Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles se coupent perpendiculairement, c'est-à-dire en formant un angle droit.
- Deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales si leur direction est orthogonale ; c'est-à-dire qu'il existe une parallèle à d_1 qui est perpendiculaire à d_2.

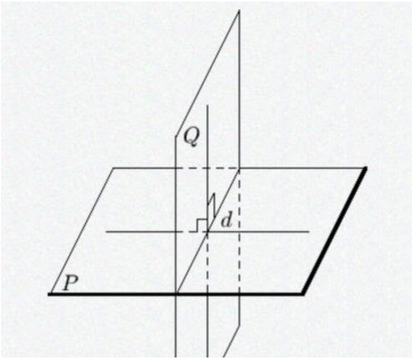


Définition

On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan.



- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement s'il existe une droite du premier plan qui est orthogonale à une droite du deuxième plan.

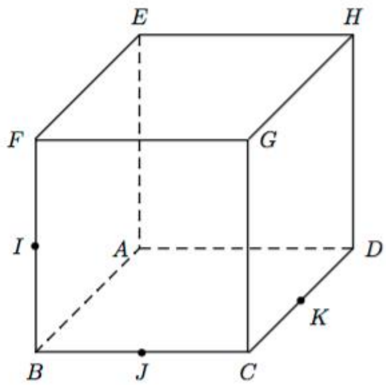


VI. SECTION D'UN CUBE PAR UN PLAN EXERCICE TYPE BAC

Pondichéry 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.
Le point K est le milieu du segment $[CD]$.



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification.

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction :

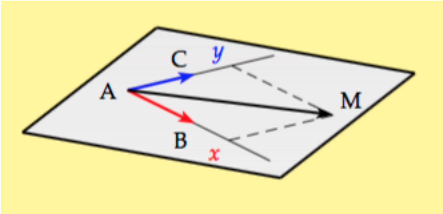
- le point L ;
- l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

VII. VECTEURS ET PLANS

1. Vecteurs coplanaires

Définition vectorielle d'un plan

Un plan est engendré par un point et deux vecteurs non colinéaires. En effet s'ils étaient colinéaires, ils n'engendreraient qu'une droite. Regardons bien :



Le plan (ABC) est engendré par le point A et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. D'ailleurs, pour tout point M du plan (ABC), nous avons :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

Comme vous l'avez sans doute remarqué, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base du plan (ABC) qui est ainsi repéré par le repère : $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Remarque

x et y sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans le plan $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Théorème *

Soit $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ une base d'un plan P. Soit $(\vec{v}_1; \vec{v}_2)$ une base d'un autre plan Q. Alors si $\vec{u}_1$ est colinéaire à $\vec{v}_1$ et si $\vec{u}_2$ est colinéaire à $\vec{v}_2$, alors les plans P et Q sont parallèles.

Définition

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires si et seulement si** $\exists (x; y) \in \mathbb{R}^2 \ t.q \quad \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

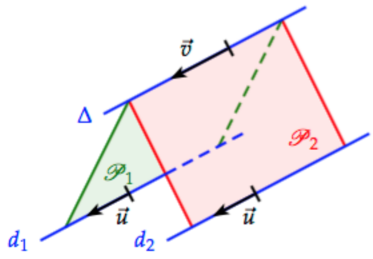
De même :

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si $\exists (x; y) \in \mathbb{R}^2 \ t.q \quad \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

2. Démonstration du théorème du toit ROC

Rappel du théorème

Théorème du toit : Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants. Et si d_1 et d_2 deux droites de ces plans sont parallèles alors d_1 et d_2 sont parallèles à l'intersection Δ des deux plans :



Supposons le contraire de ce qu'on veut montrer, c'est-à-dire que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles à l'intersection Δ et ce, malgré le fait que les hypothèses du théorème du toit soient vraies.

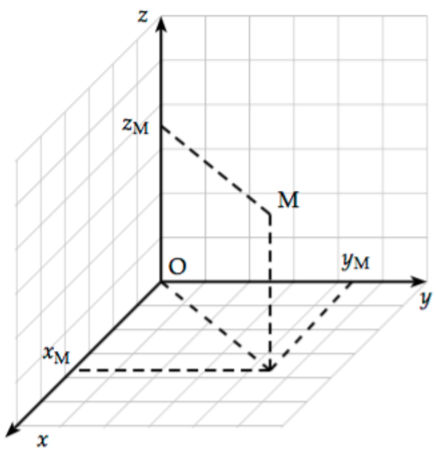
Dès lors, d_1 et d_2 étant parallèles, elles ont le même vecteur directeur $\vec{u}$. Par ailleurs, $\vec{v}$ (vecteur directeur de Δ) et $\vec{u}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}_1$. De même, en se plaçant dans le plan $\mathcal{P}_2$ on remarque que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont également deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}_2$.

Ainsi, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles en vertu du théorème *. OR, cela est contradictoire avec l'hypothèse du théorème du toit selon laquelle $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

On en déduit que l'affirmation « d_1 et d_2 ne sont pas parallèles à l'intersection Δ » est fausse. Ce qui veut dire que d_1 et d_2 sont parallèles à l'intersection Δ.

VIII. REPERAGE DANS L'ESAPCE

1. Définition



Le repère de l'espace $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est formé de l'origine O et de trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ non coplanaires.

Tout point M de l'espace est donné par :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ **où** $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$

Remarque

x, y et z sont les coordonnées du point M.

2. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété

Soit une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$. Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de cette droite. Alors on peut définir un système d'équations paramétriques pour caractériser la droite (d) :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Représentation paramétrique d'un plan

Propriété

Soient $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(m; p; q)$ deux vecteurs non colinéaires qui engendrent un plan P à partir d'un point $A(x_A; y_A; z_A)$. Alors on peut définir un système d'équations paramétriques pour caractériser le plan P :

$$\begin{cases} x = x_A + at + ms \\ y = y_A + bt + ps \\ z = z_A + ct + qs \end{cases} \quad (t; s) \in \mathbb{R}^2$$

IX. PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1. Définition

Le produit scalaire est une opération qui transforme deux vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ en un seul et unique réel noté $\vec{u}.\vec{v}$; On a les trois définitions suivantes :

- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}; \vec{v})$

2. Propriétés du produit scalaire

- Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Le produit scalaire est distributif : $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- On a : $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$

Propriété fondamentale

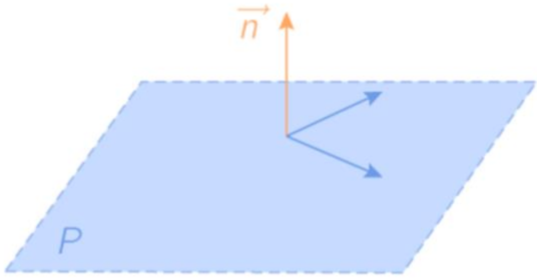
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

X. EQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN

1. Vecteur normal

Définition

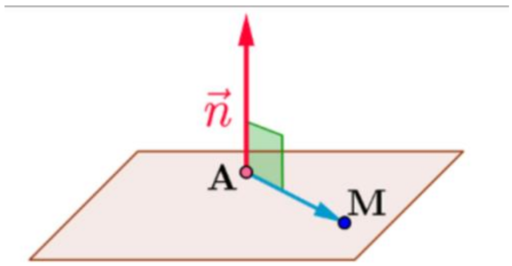
On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan P si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan :



2. Définition d'un plan avec le vecteur normal

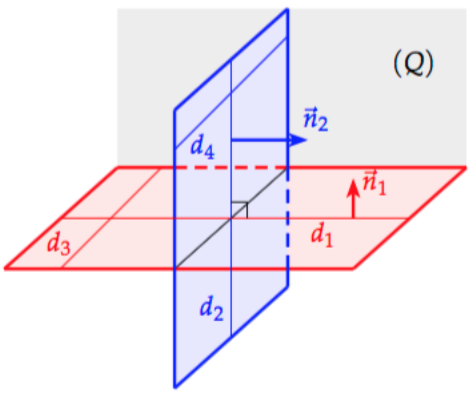
Soit un plan P passant par un point A de vecteur normal $\vec{n}$. Alors ce plan P est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$



3. Définition de deux plans perpendiculaires

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont perpendiculaires.



4. Equation cartésienne d'un plan

Théorème

L'équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

XI. EXERCICES DE BAC

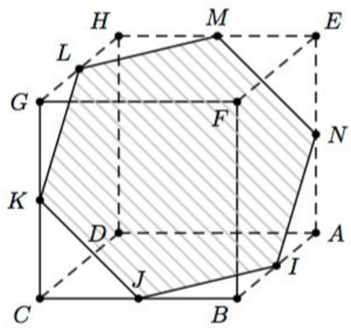
Antilles Guyane 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :
$D(0\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,0\,;\,0)$, $A(0\,;\,1\,;\,0)$,
$H(0\,;\,0\,;\,1)$ et $E(0\,;\,1\,;\,1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1) a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

2) Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

b) En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ son sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

4) Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.