09/09/20.

Divisibilité : $a/b \iff \exists k \in \mathbb{Z}$, t.q $b = k \times a$.

Combinaison linéaire :

a/b et $a/c \implies \forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$a/(\alpha b + \beta c).$$

Congruence : $a \equiv b \ [n]$.

$$\begin{cases} a = nq + r & 0 \leq r < n. \\ b = nq' + r & 0 \leq r < n. \end{cases}$$

$8 \equiv 2 \ [3]$.

$8 \mid 3$ — $6 \mid 2$ — 2.

$2 \mid 3$ — $0 \mid 0$ — 2

$8 \equiv 2 \ [3]$.

$a \equiv b \ [n] \iff n/(a-b)$.

Démonstration : $a \equiv b \ [n]$ donc on a :

$\iff$

$\exists (q;r) \in \mathbb{Z}^2$ t.q $\begin{cases} a = nq + r & \text{où } 0 \leq r < n. \\ b = nq' + r & \text{ou } 0 \leq r < n. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad a - b = nq + r - (nq' + r)$

$\Leftrightarrow \quad (a-b) = nq + r - nq' - r.$

$\Leftrightarrow \quad (a-b) = n(q-q').$ $\quad q \in \mathbb{Z}$ $q' \in \mathbb{Z}$ donc $q - q' \in \mathbb{Z}$.

Soit $K = q - q'$

$\Leftrightarrow \quad (a-b) = nK.$

$\Leftrightarrow \quad n \mid (a-b)$

Soleil est bleu $\Leftrightarrow$ Soleil est bleu.

$a \equiv b \,[n] \Leftrightarrow b \equiv a \,[n].$

$a = b$ et $b = c. \Rightarrow a = c.$ 17c | 4

Dém :

$a \equiv b \,[n]$ et $b \equiv c \,[n].$

alors $a \equiv c \,[n].$

$\begin{cases} a = nq + r & \text{ou } 0 \leq r < n. \\ b = nq' + r & \text{ou } 0 \leq r < n. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b = nq' + r. \\ c = nq'' + r. \end{cases}$

$8 = 2 \,[3]. \Leftrightarrow 3 \mid (8-2).$

$$\begin{cases} a = nq + r. \\ c = nq'' + r. \end{cases}$$ Donc $a \equiv c\ [n]$.

$$a \equiv b\ [n] \iff a - b \equiv 0\ [n].$$

$$a \equiv b\ [n] \iff n / (a-b)$$

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ t.q } a - b = nk + 0$$

$$0 = n \times 0 + 0$$

Donc

$$a - b \equiv 0\ [n].$$

$$a \equiv b\ [n] \iff a - b \equiv 0\ [n].$$

$*\iff a \equiv b\ [n]$ $\iff n / (a-b)$

$a - b \equiv 0\ [n]$.

$n / (a - b - 0)$

$n / (a-b)$.

$* \ a = b$

$* \ c = d.$

$a + c = b + d.$ $\qquad a^n = b^n.$

$a \times c = b \times d.$ $\qquad \cancel{\frac{a}{c} = \frac{b}{d}}.$

$$* \; a \equiv b \; [n] \qquad * \; c \equiv d \; [n].$$

Dém : $* \; a + c = b + d \; [n]$.

- $a \equiv b [n] \iff n \mid (a-b)$
  $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q } (a-b) = n k.$
  $a - b = n k$

- $c \equiv d [n] \iff n \mid (c-d)$
  $\iff \exists k' \in \mathbb{Z} \text{ t.q } c - d = n \times k'.$

$a - b + c - d = n k + n k'.$

$(a+c) - (b+d) = n(k+k').$ $\quad k + k' \in \mathbb{Z}.$

$n \mid (a-b)$
$\iff a \equiv b [n].$

$n \mid ((a+c) - (b+d)).$

$a + c \equiv b + d \; [n].$

$* \quad a \equiv b [n] \qquad c \equiv d [n].$

$\iff$

$a c \equiv b d \; [n].$

$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q } a - b = n k.$
$a = n k + b.$

$\exists k' \in \mathbb{Z} \text{ t.q } c - d = n k'.$
$c = n k' + d.$

$$a \times c = (nk+b) \times (nk'+d).$$

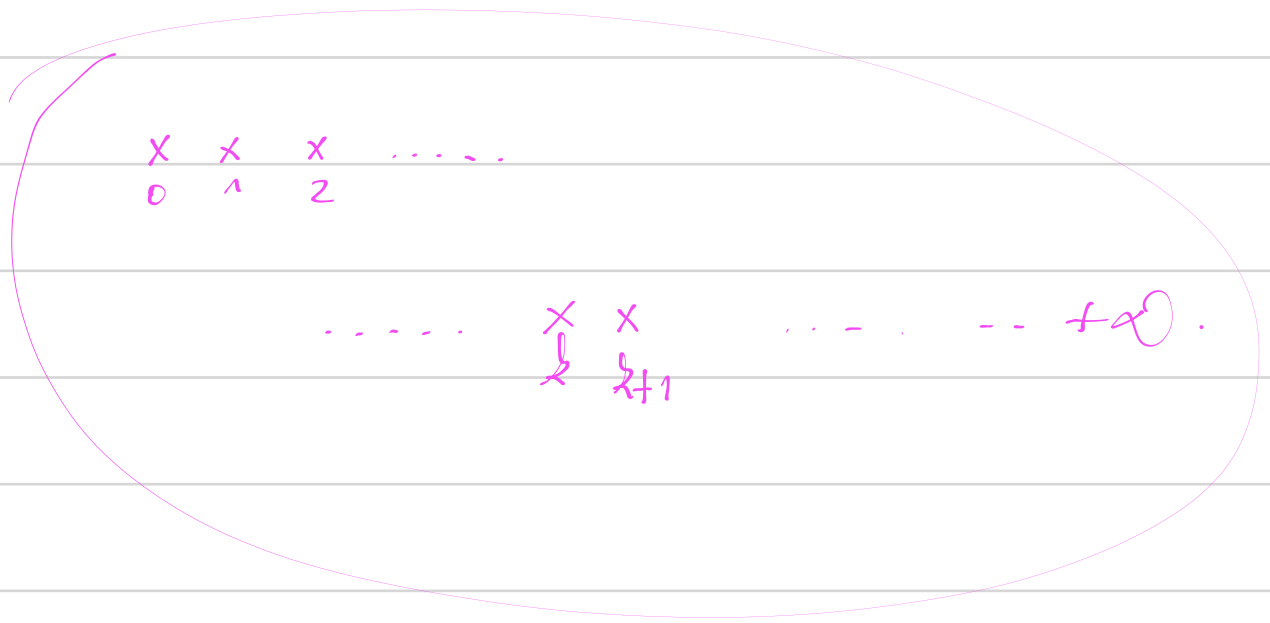
$$a \times c = n^2 kk' + nkd + nbk' + bd.$$

$$ac - bd = n\underbrace{(nkk' + kd + bk')}_{\in \mathbb{Z}}.$$

$$n \mid (ac - bd)$$

$$ac \equiv bd \ [n].$$

* $a \equiv b \ [n]$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$, on a : $a^k \equiv b^k \ [n]$



$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

n	1	2	3	...	n	$n+1$
$1+\dots+n$.	1	3	6		$1+\dots+n$	$1+\dots+n+1$
$\frac{n(n+1)}{2}$	1	3	6		$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Dém. $a \equiv b\ [n] \iff \forall k \in \mathbb{N},\ a^k \equiv b^k\ [n]$.

Ini : $k = 0$. $\quad a^0 = 1 \quad b^0 = 1$.

$1 \equiv 1\ [n]$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que :

$$a^k \equiv b^k\ [n].$$

M.Q : $a^{k+1} \equiv b^{k+1}\ [n]$.

$$* \quad a^k \equiv b^k\ [n].$$
$$* \quad a \equiv b\ [n].$$

$$a^{k+n} \equiv b^{k+n}\ [n]$$

CCL : $\forall k \in \mathbb{N},\ a^k \equiv b^k\ [n]$.

Pour le 16/09/20 faire les exercices à la fin du cours