28/10/28

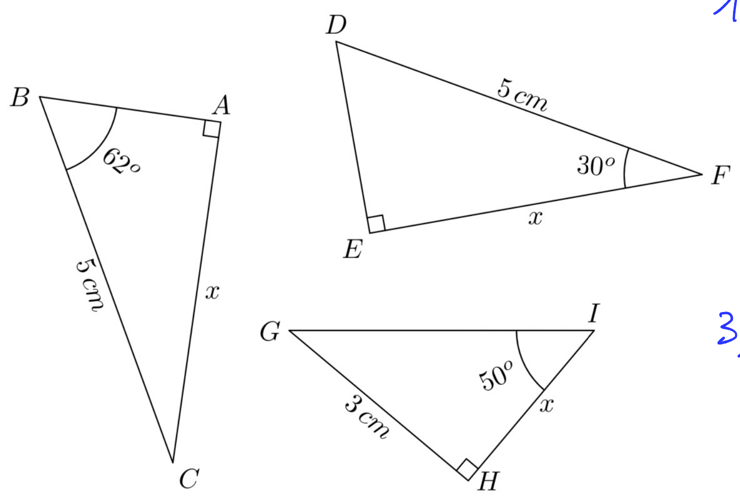
Troisième: Trigonométrie - Cours et TD.

n° 5192 ; 6416 ; 712.

Correction de l'exercice n°721.

Exercice 721

Dans chaque cas, donner la longueur x du côté indiqué. On arrondiera le résultat au millimètre près :



"Casse toi"
CAH SOH TOA

1) $\cos(\hat{A}) = \dfrac{\text{côté adj}}{\text{hyp}}$

2) $\sin(\hat{A}) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hyp}}$

3) $\tan(\hat{A}) = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}}$.

Le triangle ABC est rectangle en A. Donc on a :

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

$d = \dfrac{b \times c}{a}$

$$\sin(\widehat{CBA}) = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin(62) = \frac{x}{5}.$$

$$x = \frac{\sin(62) \times 5}{1}$$

$$\boxed{x = 4{,}41 \text{ cm.}}$$

Le triangle DEF est rectangle en E. Donc on a :

$$\cos(\widehat{DFE}) = \frac{EF}{DF}$$

$$\cos(30) = \frac{x}{5}.$$

$$x = \frac{\cos(30) \times 5}{1}$$

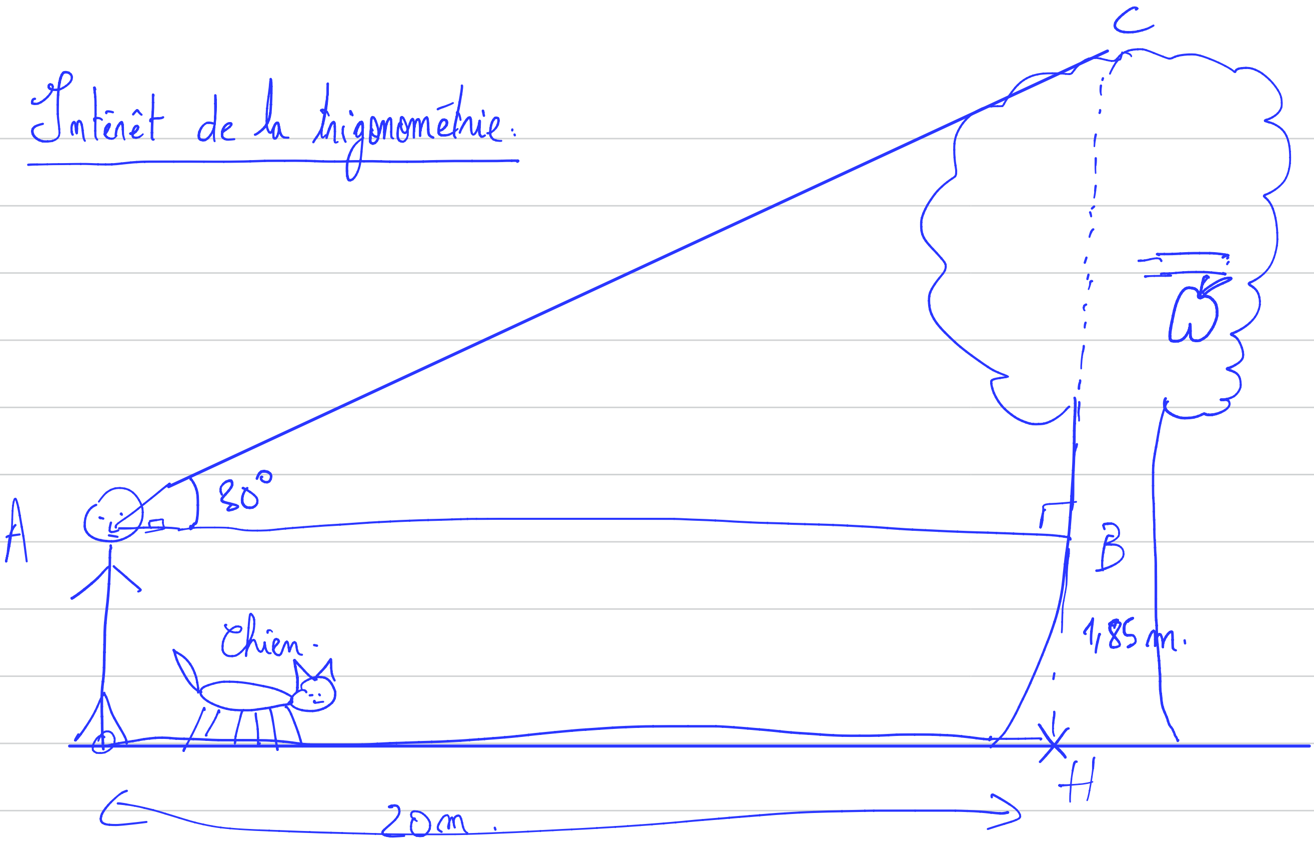
$$\boxed{x = 4{,}33 \text{ cm.}}$$

Le triangle GHI est rectangle en H. Donc on a : $\tan(\widehat{GIH}) = \dfrac{GH}{HI}$

$$\tan(50) = \frac{3}{x}$$

$$x = \frac{3 \times 1}{\tan(50)} = 2{,}52 \text{ cm.}$$

Intérêt de la trigonométrie :



Le triangle ABC est rectangle en B. Donc on a : $\tan(\widehat{CAB}) = \dfrac{CB}{AB}$.

$$\tan(30) = \frac{CB}{20}$$

$$CB = 20 \times \tan(30).$$

$$CB = 11{,}55 \text{ m}.$$

Hauteur : $CH = CB + BH = 11{,}55 + 1{,}85.$

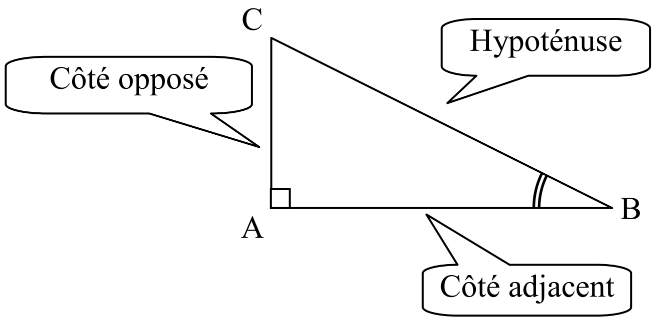
$$= 13{,}40 \text{ m}.$$

Trigonométrie : calcul de longueurs

I) Vocabulaire

Dans le triangle ABC, rectangle en A,

- Le côté [BC] est le côté le plus long, c'est l'hypoténuse du triangle ABC.
- Pour l'angle $\widehat{ABC}$:
  [AB] est le côté adjacent.
  [AC] est le côté opposé.



Remarques : Pour le triangle ABC, rectangle en A, l'angle $\widehat{BCA}$ est l'autre angle aigu du triangle.
Pour l'angle $\widehat{BCA}$, le côté adjacent est le côté [AC] et le côté opposé est le côté [AB].

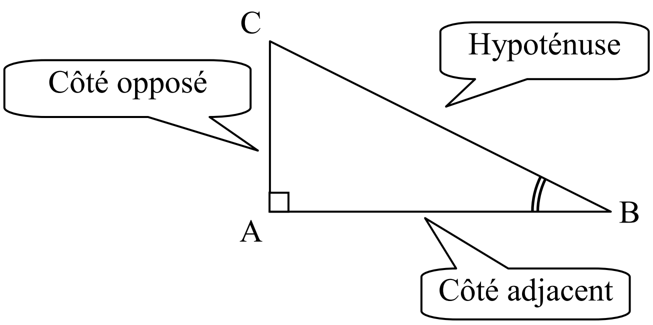
II) Définitions : cosinus ; sinus ; tangente

Soit un triangle ABC rectangle en A.
Le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ sont les nombres, notés respectivement $\cos\widehat{ABC}$, $\sin\widehat{ABC}$ et $\tan\widehat{ABC}$, définis par :

$$\text{Cos } \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{Côte Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\text{Sin } \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = = \frac{\text{Côte Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\text{Tan } \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{Côte Opposé}}{\text{Côte Adjacent}}$$

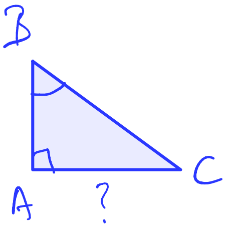


Moyen mnémotechnique :
« SOH-CAH-TOA » ou « CAH-SOH-TOA » (« casse-toi ») dont chaque lettre est l'initiale des différents mots des 3 formules.

$\frac{1231}{1230}$ $\frac{3}{2} > 1$ $\frac{2}{3} < 1.$ $\frac{10}{2} = 5 > 1.$

III) Propriété

Le cosinus et le sinus d'un angle sont des nombres compris entre 0 et 1.



Démonstration (pour le sinus):

[BC] est l'hypoténuse donc BC > AC d'où $\sin\left(A\hat{B}C\right) = \frac{AC}{BC} < 1$

Comme AC et BC sont deux nombres positifs $\frac{AC}{BC} > 0$ d'où

$0 < \sin\left(A\hat{B}C\right) < 1$

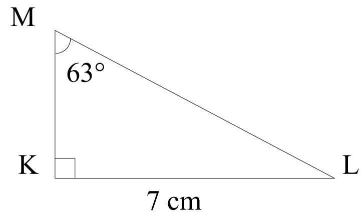
La démonstration est la même pour le cos.

IV) Utilisation de la calculatrice : il faut se mettre en mode degré (deg)

Calcul de tan 36°	Calcul de cos 45°
$\boxed{\text{tan}}$ 36 $\boxed{\text{EXE}}$ 0,72654258...	$\boxed{\text{Cos}}$ 45 $\boxed{\text{EXE}}$ 0,7071067812
tan 36° ≈ 0,73	Cos 45°≈0,71

V) Application : calcul d'une longueur

KLM est un triangle rectangle en K tel que :
$L\hat{M}K = 63°$ *et* $KL = 7\,cm$.
Calculer LM, donner une valeur arrondie à 1mm près.

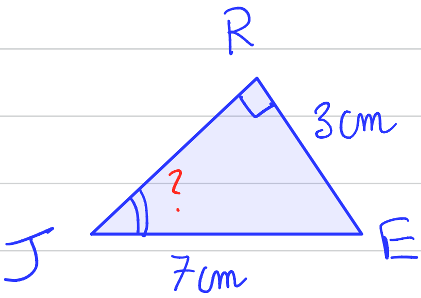


Le triangle KLM rectangle en K

$\sin\left(K\hat{M}L\right) = \frac{KL}{LM}$ *d'où* $LM = \frac{KL \times 1}{\sin 63°} = \frac{7 \times 1}{\sin 63°} \approx 7{,}9\,cm$

On tape 7 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{sin}}$ 63 et on obtient LM ≈ 7,9 cm.

Méthode : Calculer un angle avec la trigonométrie.



Le triangle JER est rectangle en R. Donc on a :

$$\sin(\widehat{RJE}) = \frac{RE}{JE}.$$

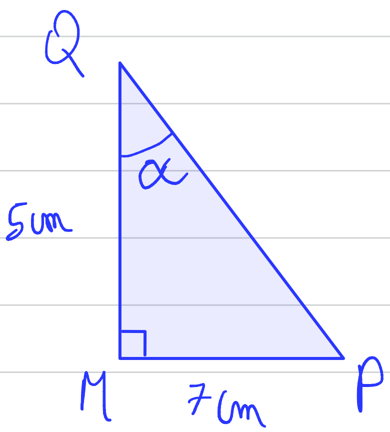
$$\sin(\widehat{RJE}) = \frac{3}{7}.$$

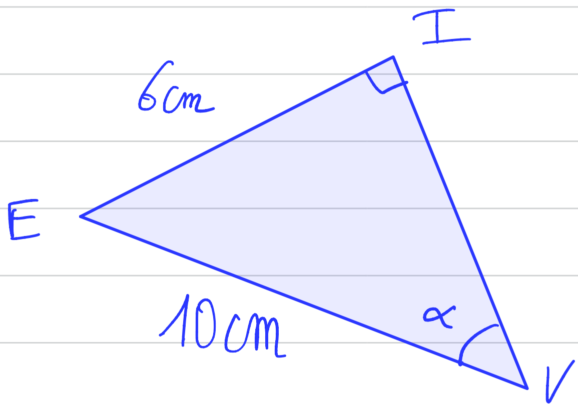
$$\widehat{RJE} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{3}{7}\right).$$

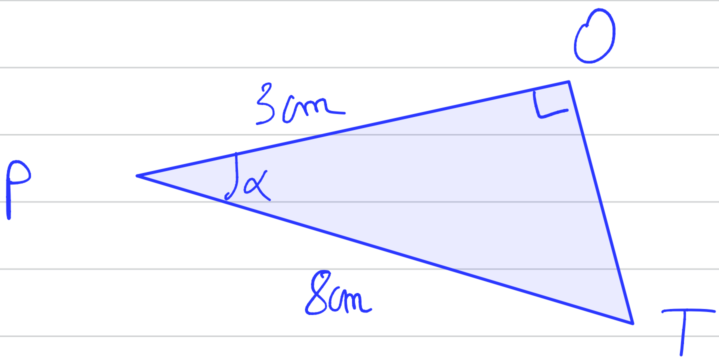
$$= \sin^{-1}\left(\frac{3}{7}\right).$$

$$\widehat{RJE} = 25°.$$

Application : Calculer les angles α (alpha).







Le triangle QMP est rectangle en M. Donc on a:

$$\tan(\alpha) = \frac{MP}{MQ}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{7}{5}.$$

$$\alpha = \operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{5}\right) \simeq 54°$$

Le triangle EVI est rectangle en I. Donc on a:

$$\sin(\alpha) = \frac{EI}{EV}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{6}{10}$$

$$\alpha = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{6}{10}\right) \simeq 37°.$$

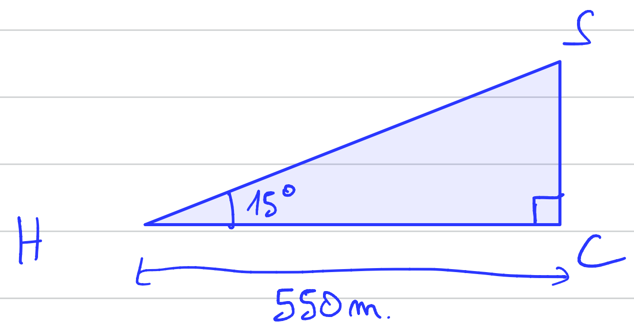
Le triangle POT est rectangle en O. Donc on a:

$$\cos(\alpha) = \frac{PO}{PT}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{3}{8}$$

$$\alpha = \operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{8}\right) \simeq 68°.$$

Exercice 1157.



1) Le triangle HCS est rectangle en C.
Donc on a :

$$\cos(\widehat{SHC}) = \frac{HC}{HS}$$

$$\cos(15) = \frac{550}{HS}$$

$$HS = \frac{1 \times 550}{\cos(15)}$$

$HS \simeq 569,40$ m (arrondi au cm).

2) a) Dans un triangle, la somme des 3 angles vaut 180°.

On en déduit que $\widehat{HSC} = 180 - 90 - 15$.

$\widehat{HSC} = 90 - 15$

$\widehat{HSC} = 75°$.

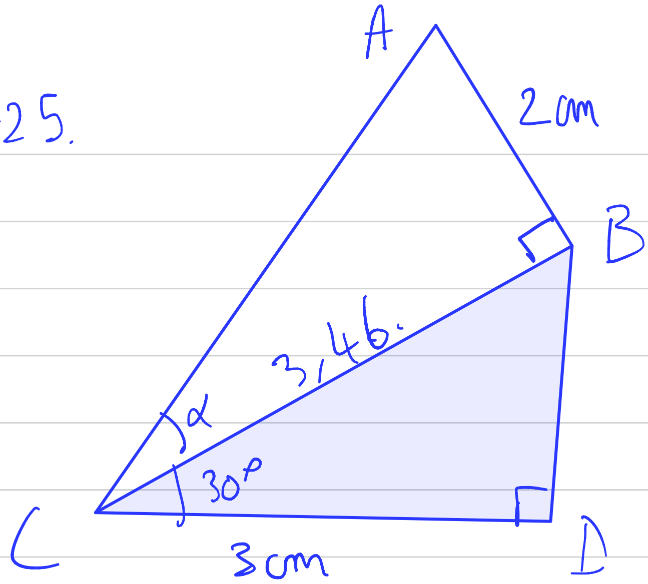
b) Le triangle HCS est rectangle en C. Donc on a :

$$\tan(\widehat{SHC}) = \frac{SC}{HC}$$

$$\tan(15) = \frac{SC}{550}$$

$SC = 550 \times \tan(15) = 147$ m.

n°725.



Le triangle CDB est rectangle en D.

Donc $\cos(30) = \frac{3}{CB}$.

$\Leftrightarrow \quad CB = \frac{3}{\cos(30)} = 3{,}46$ cm.

Le triangle CBA est rectangle en B. Donc

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{3{,}46}.$$

$$\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{2}{3{,}46}\right) = 30°.$$

Travail : 5 192 ; 64 16 ; 712.