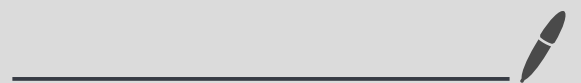


16/11/20

TG-



### EXERCICE 38

Soit la fonction  $f$  définie sur  $I = ]-2; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{-x^3}{x+2}$ .

1) a) Déterminer les limites de  $f$  en  $-2$  et en  $+\infty$ .

b) Déterminer la fonction dérivée  $f'$  et montrer que  $f'(x) = -\frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$ .

c) En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $] -2; +\infty[$ .

2) a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $] -2; +\infty[$  puis montrer que  $-1,5 < \alpha < 0$ .

b) A l'aide de l'algorithme de dichotomie donner un encadrement à  $10^{-4}$  de  $\alpha$  ainsi que le nombre de boucles nécessaires pour l'obtenir.

1) a) Limite de  $f$  en  $-2^+$  : Soit  $x \in ]-2; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} -x^3 = 8$$

D'ailleurs, on a :

$x$	$-2$	$+\infty$
$x+2$	$\phi$	$+$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x+2 = 0^+$$

Par quotient de limites  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ .

Limite en  $+\infty$  : Soit  $x \in ]-2; +\infty[$ .

$$f(x) = \frac{-x^3}{x+2} = \frac{-x^3}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = -\frac{x^2}{1+\frac{2}{x}}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1+\frac{2}{x} = 1.$$

Par quotient de limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

1) b) Soit  $x \in ]-2; +\infty[$ .  $f$  est dérivable sur son ensemble de définition car  $f$  est une  $f^0$  rationnelle:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 \cdot (x+2) - 1 \cdot (-x^3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^3 - 6x^2 + x^3}{(x+2)^2} = \frac{-2x^3 - 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

1) c) Soit  $x \in ]-2; +\infty[$ . On dresse le tableau de var<sup>o</sup> de  $f$  à l'aide du tableau de signe de  $f'$ :

$x$	$-2$	$+\infty$
$-2x^2$		—
$x+3$		+
$(x+2)^2$		+
signe de $f'(x)$		—
Var <sup>o</sup> de $f$ .	$+\infty$	$-\infty$

2) a) \*  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $]-2; +\infty[$ .  
 \*  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ .

$$\ast \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$15^3 = 3375.$$

$$\begin{aligned} (10+5)^3 &= 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 \cdot 5^2 + 5^3 \\ &= 1000 + 1500 + 750 + 125 \\ &= 2500 + 750 + 125 = 3375 \end{aligned}$$

$$\ast 2 \in ]-\infty; +\infty[. \quad 1,5^3 = 3,375.$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'éq<sup>o</sup>  $f(x) = 2$  admet une unique sol<sup>o</sup>  $\alpha$  sur  $] -2; +\infty[$ .

$$\text{Or } f(-1,5) = \frac{-(-1,5)^3}{-1,5+2} = \frac{3,375}{0,5} = 6,75$$

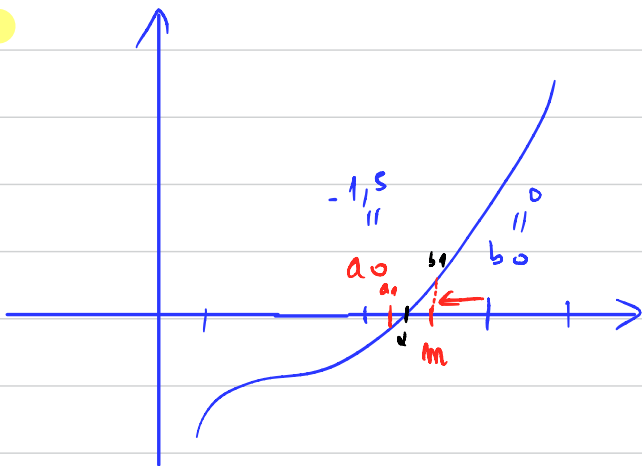
$$f(0) = \frac{-0^3}{0+2} = 0.$$

$$\begin{aligned} 3 &\rightarrow \frac{1}{3} \\ 1 &\rightarrow \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3. \end{aligned}$$

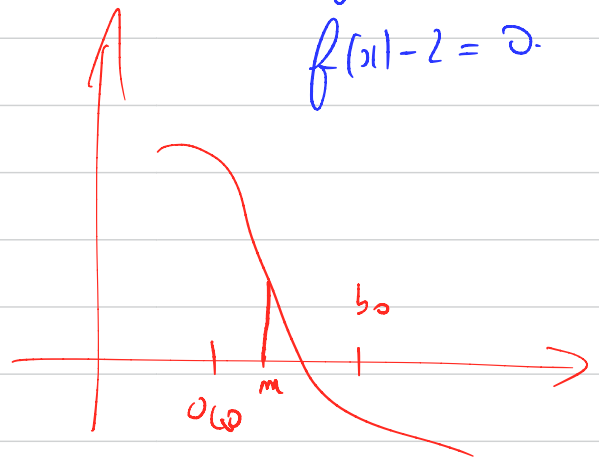
On remarque que  $f(-1,5) \geq 2 \geq f(0)$ .

$$\boxed{-1,5 \leq \alpha \leq 0}$$

2)b



$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \\ f(x) - 2 &= 0. \end{aligned}$$



$$-1,1795 \leq \alpha \leq -1,1794.$$

14 itérations.

# DERIVABILITE ET CONVEXITE

## Chapitre 4 : Dérivabilité et convexité

### I. RAPPELS SUR LA DERIVABILITE

#### 1. Définition

##### Définition

Le nombre dérivé d'une fonction en un point d'abscisse  $a$  est noté  $f'(a)$ . Il est égal au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse  $a$ .

Pour calculer ce coefficient directeur, il faut que  $h$  se rapproche de  $a$  c'est-à-dire que  $h$  doit se rapprocher de 0 mais sans jamais être égal à 0. On obtient ainsi la **définition algébrique** du nombre dérivé :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

#### 2. Equation de la tangente

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  un intervalle. Soit  $A$  un point de la courbe d'abscisse  $a$ . Alors, l'équation de la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$  est :

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$
$$f'(2) = 4e^4$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

#### 3. Dérivées des fonctions usuelles

$$\tau_2: y = 4e^4(x - 2) + e^4$$
$$y = 4e^4x - 8e^4 + e^4$$

$$f(x) = e^{x^2}$$
$$f(-x) = f(x) \text{ (paire)}$$
$$f(-x) = -f(x) \text{ (impair)}$$

$$y = 4e^4x - 7e^4$$

Fonction	$\mathcal{D}_f$	Dérivée	$\mathcal{D}'_f$
$ax+b$ $f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

$\frac{1}{x^m} = x^{-m}$   
 $(x^{-m})' = -m x^{-m-1}$   
 $\cos(x) = 0$   
 $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

#### 4. Dérivée d'une fonction composée

##### 1. COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS

###### Définition

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies respectivement sur  $I$  et  $J$  tels que  $u(I) \subset J$ , c'est-à-dire que pour tout  $x \in I$ ,  $u(x) \in J$ .

On appelle composée de  $u$  par  $v$ , la fonction notée  $v \circ u(x) = v(u(x))$

###### Exemple

$u(x) = 3x - 4$  et  $v(x) = \sqrt{x}$ . Alors  $v \circ u(x) = v(3x - 4) = \sqrt{3x - 4}$ . Notons que  $v$  est définie sur  $J = \mathbb{R}_+$ , la condition sur  $I$  est  $3x - 4 \geq 0$  soit  $I = \left[ \frac{4}{3}; +\infty \right[$ .

###### Remarque

On peut décomposer une fonction en deux fonctions plus simples. :

$f(x) = e^{x^2+2}$  se décompose en  $u(x) = x^2 + 2$  et  $v(x) = e^x$ . On peut alors vérifier que  $v \circ u(x) = f(x)$

##### 2. MONOTONIE D'UNE FONCTION COMPOSEE

###### Théorème

Soit les fonctions  $u$  et  $v$  définies respectivement sur  $I$  et sur  $u(I)$ . Alors :

- Si  $u$  et  $v$  ont les mêmes variations, alors  $v \circ u$  est croissante sur  $I$ .
- Si  $u$  et  $v$  ont des variations contraires, alors  $v \circ u$  est décroissante sur  $I$ .

$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$   
 $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$   
 $\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$   
 $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

$\sin ]0; \frac{\pi}{2}[$

$e^{\frac{1}{x}}$

**Remarque**

Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser la dérivation pour étudier les variations d'une fonction composée dont les deux fonctions composées ont des variations monotones sur leur ensemble de définition respectif.

**5. Dérivée de la fonction composée**

**Théorème**

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables respectivement sur  $I$  et  $J$  telles que  $u(I) \subset J$ . Alors la fonction  $v \circ u$  est dérivable telle que :

$$v'(u(x)) = u'(x) \times v'(u(x)).$$

$$v \circ u'(x) = u'(x) \times v' \circ u(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

**6. Opérations sur les dérivées**

Dérivée de la somme	$(u + v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée de l'exponentielle	$(e^u)' = u'e^u$
Dérivée de la composée	$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$

$f(x) = \sqrt{2x+4}$

$f(x) = v(u(x))$

$u(x) = 2x+4$   
 $v(x) = \sqrt{x}$

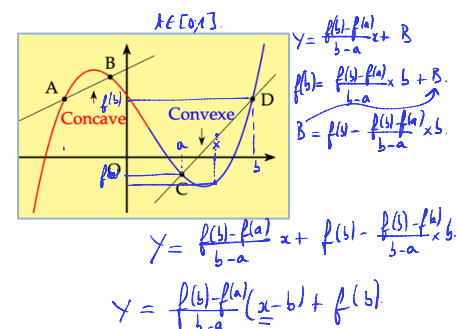
$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$   
 $= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+4}}$

**II. CONVEXITE**

**1. Définitions**

Soit une fonction  $f$  de courbe représentative  $C_f$ .

- On appelle sécante de  $C_f$  la droite passant par deux points de  $C_f$ .
- On dit que  $f$  est convexe sur  $I$  si  $C_f$  est en dessous de ses sécantes sur  $I$ .
- On dit que  $f$  est concave sur  $I$  si  $C_f$  est au-dessus de ses sécantes sur  $I$ .





## 2. Inégalité

$$x = ta + (1-t)b$$

### Théorème

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  contenant deux réels  $a$  et  $b$  et soit  $t \in [0; 1]$ . Alors :

- Si  $f$  est convexe sur  $I$  alors :  $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ .
- Si  $f$  est concave sur  $I$  alors :  $f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b)$ .

## 3. Dérivée seconde

### Définition

Soit une fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $I$ . On appelle la dérivée seconde de  $f$ , notée  $f''$ , la fonction dérivée de  $f'$ .

### Théorème

Soit une fonction deux fois dérivable sur  $I$ . Alors :

- $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $f'' > 0$ .
- $f$  est concave sur  $I$  si et seulement si  $f'' < 0$ .

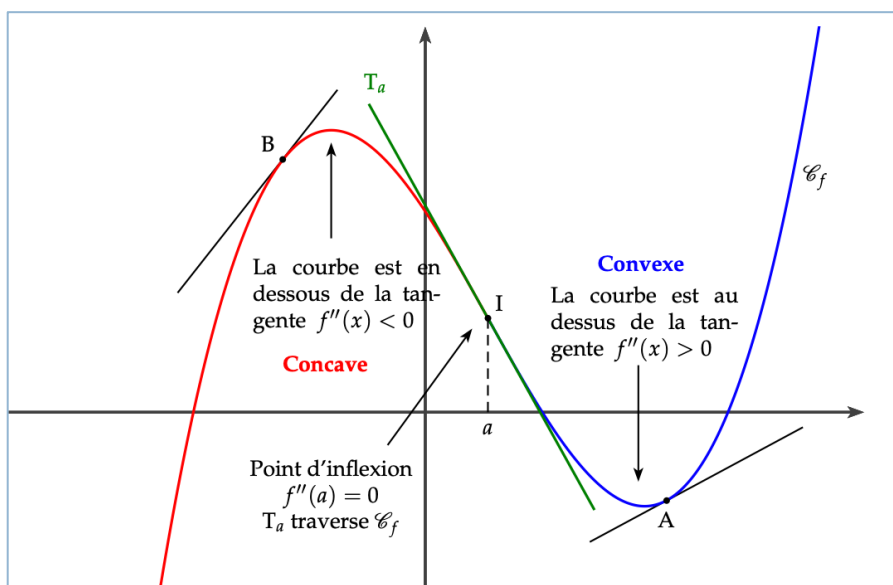
### Remarque

- Si  $f$  est convexe sur  $I$  alors  $C_f$  est au-dessus de ses tangentes sur  $I$ .
- Si  $f$  est concave sur  $I$  alors  $C_f$  est en-dessous de ses tangentes sur  $I$ .

### Définition : le point d'inflexion

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $I$  de courbe représentative  $C_f$ . Soit  $A(a; f(a))$  un point de  $C_f$  où l'on observe une tangente  $T_a$ . Alors :

- On dit que  $C_f$  admet un point d'inflexion en  $A$  si la tangente en  $A$   $T_a$  traverse  $C_f$  en  $A$ .
- Si  $f''(a) = 0$  en changeant de signe alors  $C_f$  admet un point d'inflexion en  $a$ .



$$f(x) = -x^2 - 1$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$g \circ f(x) = \sqrt{-x^2 - 1}$$

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{-x^2 - 1}$$

$$x \in \mathbb{R}, f(x)$$

$$x^2 \geq 0$$

$$-x^2 \leq 0$$

$$-x^2 - 1 \leq -1$$

$$f(x) \leq -1$$

$$f(x) \in ]-\infty; -1]$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow ]-\infty; -1]$$

$$x \longmapsto f(x)$$

$$f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$f(\mathbb{R}) = ]-\infty; -1] \not\subset D_g$$

$$u \nearrow \text{ et } v \nearrow \quad u \circ v$$

$$a \in D_v \quad b \in D_v \quad \text{tp } a \leq b$$

$$v(a) \leq v(b)$$

$$u(v(a)) \leq u(v(b))$$

$$(u \circ v)(a) \leq (u \circ v)(b)$$

$$f(x) = u(v(x))$$

$$f'(x) = \underline{v'(x) \times u'(v(x))}$$

$$f'(x) = \lim_{b \rightarrow x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{u(v(b)) - u(v(x))}{b - x}$$

$$= \frac{u(v(b)) - u(v(x))}{v(b) - v(x)} \times \frac{v(b) - v(x)}{b - x}$$

$$= u'(v(x)) \times v'(x)$$