DERIVABILITE ET CONVEXITE

Chapitre 4 : Dérivabilité et convexité

I. RAPPELS SUR LA DERIVABILITE

1. Définition

Définition

Le nombre dérivé d'une fonction en un point d'abscisse a est noté $f'(a)$. Il est égal au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.

Pour calculer ce coefficient directeur, il faut que b se rapproche de a c'est-à-dire que h doit se rapprocher de 0 mais sans jamais être égal à 0. On obtient ainsi la **définition algébrique** du nombre dérivé :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2. Equation de la tangente

Soit f une fonction définie sur I un intervalle. Soit A un point de la courbe d'abscisse a. Alors, l'équation de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

3. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	$\mathscr{D}_f$	Dérivée	$\mathscr{D}'_f$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

4. Dérivée d'une fonction composée

1. COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS

Définition

Soient u et v deux fonctions définies respectivement sur I et J tels que $u(I) \subset J$, c'est-à-dire que pour tout $x \in I, u(x) \in J$.

On appelle composée de u par v, la fonction notée $v \circ u(x) = v(u(x))$

Exemple

$u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Alors $v \circ u(x) = v(3x - 4) = \sqrt{3x - 4}$. Notons que v est définie sur $J = \mathbb{R}_+$, la condition sur I est $3x - 4 \geq 0$ soit $I = \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$.

Remarque

On peut décomposer une fonction en deux fonctions plus simples. :

$f(x) = e^{x^2+2}$ se décompose en $u(x) = x^2 + 2$ et $v(x) = e^x$. On peut alors vérifier que $v \circ u(x) = f(x)$

2. MONOTONIE D'UNE FONCTION COMPOSEE

Théorème

Soit les fonctions u et v définies respectivement sur I et sur $u(I)$. Alors :

- Si u et v ont les mêmes variations, alors $v \circ u$ est croissante sur I.
- Si u et v ont des variations contraires, alors $v \circ u$ est décroissante sur I.

Remarque

Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser la dérivation pour étudier les variations d'une fonction composée dont les deux fonctions composées ont des variations monotones sur leur ensemble de définition respectif.

5. Dérivée de la fonction composée

Théorème

Soit u et v deux fonctions dérivables respectivement sur I et J telles que $u(I) \subset J$. Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable telle que :

$$v \circ u'(x) = u'(x) \times v' \circ u(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)$$

6. Opérations sur les dérivées

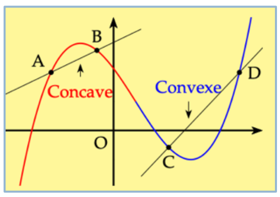
Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée de l'exponentielle	$(e^u)' = u'\,e^u$
Dérivée de la composée	$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$

II. CONVEXITE

1. Définitions

Soit une fonction f de courbe représentative C_f.

- On appelle sécante de C_f la droite passant par deux points de C_f.
- On dit que f est convexe sur I si C_f est en dessous de ses sécantes sur I.
- On dit que f est concave sur I si C_f est au-dessus de ses sécantes sur I.



www.plusdebonnesnotes.com

2. Inégalité

Théorème

Soit f une fonction définie sur I contenant deux réels a et b et soit $t \in [0; 1]$. Alors :

- Si f est convexe sur I alors : $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$.
- Si f est concave sur I alors : $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$.

3. Dérivée seconde

Définition

Soit une fonction f deux fois dérivable sur I. On appelle la dérivée seconde de f, notée f'', la fonction dérivée de f'.

Théorème

Soit une fonction deux fois dérivable sur I. Alors :

- f est convexe sur I si et seulement si $f'' > 0$.
- f est concave sur I si et seulement si $f'' < 0$.

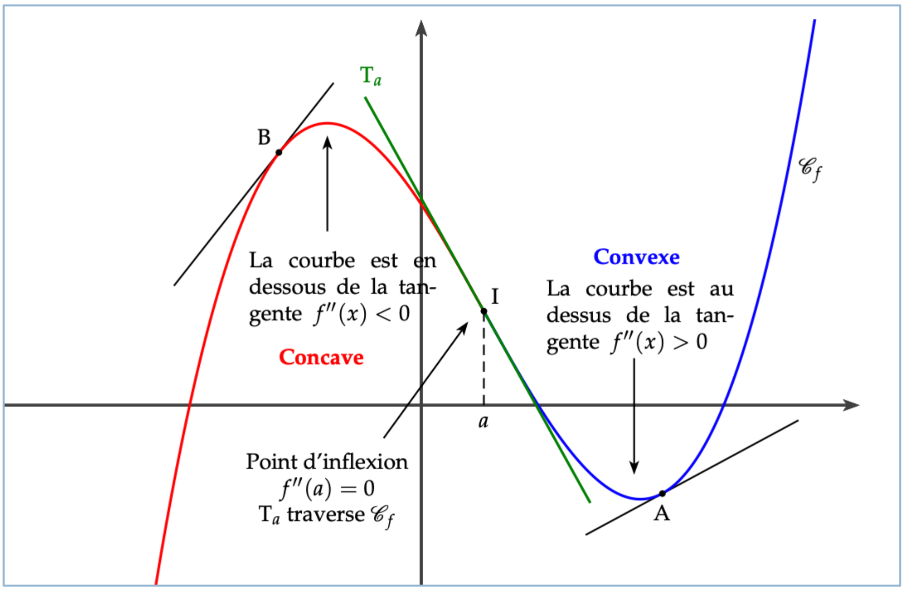
Remarque

- Si f est convexe sur I alors C_f est au-dessus de ses tangentes sur I.
- Si f est concave sur I alors C_f est en-dessous de ses tangentes sur I.

Définition : le point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivables sur I de courbe représentative C_f. Soit $A\big(a; f(a)\big)$ un point de C_f où l'on observe une tangente T_a. Alors :

- On dit que C_f admet un point d'inflexion en A si la tangente en A T_a traverse C_f en A.
- Si $f''(a) = 0$ en changeant de signe alors C_f admet un point d'inflexion en a.



www.plusdebonnesnotes.com

Exercice n°2 :

1) En 1, les deux abscisses semblent avoir une tangente commune.

2) Etude du signe de x^2-x+1 sur $\mathbb{R}$:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1-4 < 0$

Comme $1>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2-x+1>0$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \quad \text{où} \quad u(x) = x^2-x+1.$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

g est dér sur $\mathbb{R}$ comme $f°$ polynôme. D'où :

$g'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

Or $f'(1) = \frac{2\times 1-1}{2\sqrt{1^2-1+1}}$

$f'(1) = \frac{1}{2}$.

et $g'(1) = -\frac{1}{2}\times 1+1 = \frac{1}{2}$.

Or $f(1) = \sqrt{1^2-1+1} = \sqrt{1} = 1$ et $g(1) = -\frac{1}{4}\times 1^2 + 1 + \frac{1}{4}$.

$g(1) = 1$.

Donc $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ ont bien des tangentes communes en 1.

Exercice n°1 : Fait à l'oral.

Exercice n°3 : 6)

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3$$

$f(x) = \left(u(x)\right)^n$

$f'(x) = n\,u'(x)\left(u(x)\right)^{n-1}$.

$u(x) = \frac{x+1}{x+2}$

$u'(x) = \frac{1\times(x+2) - 1\times(x+1)}{(x+2)^2}$

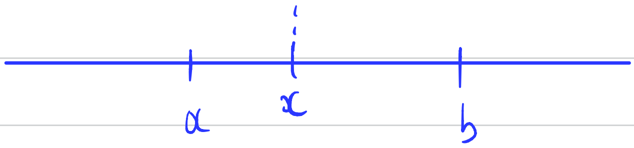
$u'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$

$$f'(x) = 3 \times \frac{1}{(x+2)^2} \times \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2$$

$$\boxed{f \text{ est dér sur } \mathbb{R} \setminus \{-2\}.}$$

fonct° rationnelle : * f° quotient de 2 polynômes.

* les f° rationnelles sont dér sur D_f.



$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Ex n°4 : $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$. $D_{f'}$ $\frac{x+1}{2-x} > 0$.

$$\boxed{\left(u(v(x))\right)' = v'(x) \times u'(v(x)).}$$

Ex n°5 : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$.

5 $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$u(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$u'(x) = \frac{1 \times (x-1) - 1x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}\, e^{\frac{x}{x-1}}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{x} > 0.$$

n°8 : 1)a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x+1}}{x}$

$\boxed{y = mx + p.}$

D'une part $x \neq 0$. $\longrightarrow$ $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[= A$

D'autre part, $5x+1 \geq 0$

$x \geq -\dfrac{1}{5}$. $\longrightarrow$ $[-\frac{1}{5};+\infty[= B$

$$D_f = A \cap B = [-\tfrac{1}{5};0[\cup]0;+\infty[.$$

b) en 0^- : $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{5x+1} = \sqrt{1} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0^-.$

Par quotient des limites : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$

en 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{5x+1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$

Par quotient de limites, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$

$\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}.$

car $x \to +\infty$.

en $+\infty$: $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x+1}}{x} = \dfrac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{x}\,\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x(5+\frac{1}{x})}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}$

$= \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\times\sqrt{(5+\frac{1}{x})}}{\cancel{\sqrt{x}}\times\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{5+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5+\frac{1}{x}} = \sqrt{5}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par quotient de limites,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2) a) f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{5};0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$ car $\sqrt{5\times\left(-\frac{1}{5}\right)+1} = 0$.

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x+1}}{x}$ On pose $u(x) = \sqrt{5x+1}$ $v(x) = x$

$u'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}}$; $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{5x}{2\sqrt{5x+1}} - \dfrac{\sqrt{5x+1} \times 2\sqrt{5x+1}}{1 \times 2\sqrt{5x+1}}}{x^2} = \frac{\dfrac{5x - 2(5x+1)}{2\sqrt{5x+1}}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{-5x-2}^{\ominus}}{\underbrace{2\sqrt{5x+1}}_{(+)} \times \underbrace{x^2}_{+}}$$

c) Soit $x \in \left]-\frac{1}{5};0\right[\cup \left]0;+\infty\right[= D_f$, Or $\forall x \in D_f$, $2\sqrt{5x+1} \times x^2 > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de : $-5x-2 = 0$

$x = \dfrac{-2}{5}$.

x	$-\frac{1}{5}$		0		$+\infty$
$-5x-2$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	0

3) a) La tangente à $\mathcal{C}_f$ en $-\frac{1}{5}$ est verticale car $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{5}^+} f'(x) = -\infty$.

n° 11