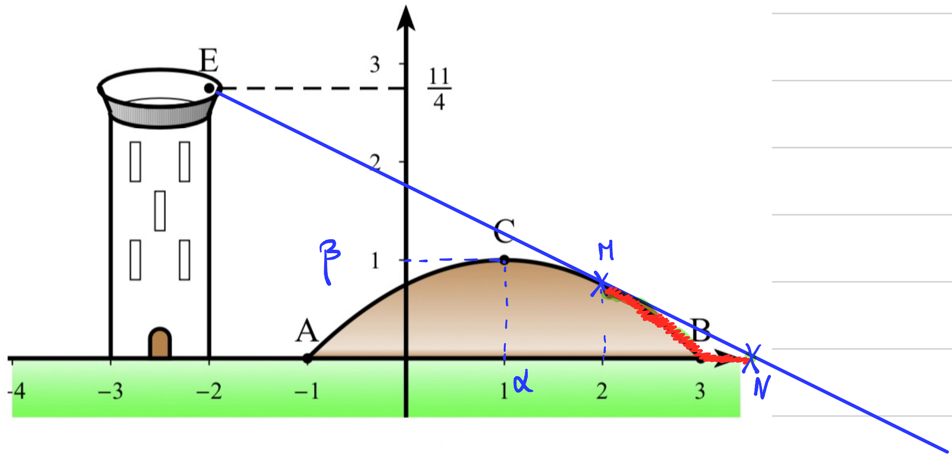
05/12/20

Spé maths : Dérivation.

N°11 :



$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

$f(x) = a(x-1)^2 + 1$.

2) a) Fait.

b) Soit a l'abscisse d'une tangente à $\mathcal{C}f$:

Or $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$f'(x) = -\frac{1}{4} \times 2x + \frac{1}{2}$.

$y = \left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right)(x-a) - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}$

$f'(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Or $E \in T_a$ donc les coordonnées de E doivent satisfaire l'éq° de la tangente :

$f'(a) = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$.

$$\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right)(-2-a) - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}.$$

$$a + \frac{1}{2}a^2 - 1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4} - \frac{11}{4} = 0.$$

$$\frac{1}{4}a^2 + a - 3 = 0.$$

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0.}$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times (-3)$$

$$\Delta = 1 + 3 = 4 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{4}}{2\times\frac{1}{4}} = \frac{-3}{\frac{1}{2}} = -6. \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{4}}{2\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

On en déduit qu'on ne voit pas les points de la colline à partir de $x = 2$.

Déterminons l'équation de la tangente à C_f en 2 :

$$T_2 : y = \left(-\frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}\right)(x-2) - \frac{1}{4}\times 2^2 + \frac{1}{2}\times 2 + \frac{3}{4}.$$

$$T_2 : y = -\frac{1}{2}(x-2) \cancel{-1} \cancel{+1} + \frac{3}{4}$$

$$T_2 : y = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{3}{4}$$

$$\boxed{T_2 : y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.}$$

On résout :

$$-\frac{1}{2}x + \frac{7}{4} = 0$$

$$-\frac{1}{2}x = -\frac{7}{4}$$

$$x = -\frac{7}{4}\times(-2)$$

$$x = \frac{7}{2} = \boxed{3,5}$$

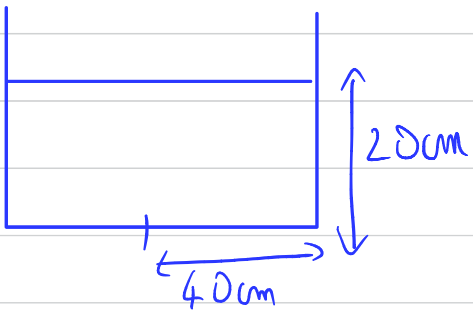
n°22 : 1) d est une distance donc $d \geq 0$.

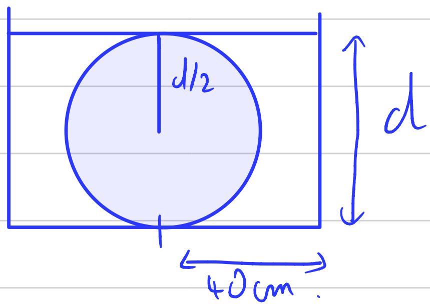
Pour que la bille entre dans le cylindre, il faut que le diamètre de la bille soit inférieur au diamètre du cylindre. Donc :

$\times A$

$AA = 0$.

$$d \leq 40 \times 2$$
$$d \leq 80.$$





Le volume d'eau se conserve, d'où :

$$\cancel{\pi} r^2 h = \cancel{\pi} r^2 d - \frac{4}{3}\cancel{\pi}\left(\frac{d}{2}\right)^3$$
$$40^2 \times 20 = 40^2 \times d - \frac{4}{3} \times \frac{d^3}{8}$$

$$A = B + C \quad) \times 6$$
$$6A = (B+C) \times 6.$$
$$6A = 6B + 6C.$$

$$\frac{4}{24} d^3 - 1600 d + 32000 = 0. \quad) \times 6.$$

$$\boxed{d^3 - 9600 d + 192000 = 0}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}.$$

2) a) Soit $x \in [0;80]$, $f(x) = x^3 - 9600x + 192\,000$.

$$f'(x) = 3x^2 - 9600$$

On résout $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 9600 = 0.$

$$3x^2 = 9600.$$
$$x^2 = \frac{9600}{3} = 3200.$$

$x = \sqrt{3200}$ ou $x = -\sqrt{3200}$.

$x = 40\sqrt{2}$ ou $x = -40\sqrt{2}$.

impossible car $x \in [0\,;80]$.

Dressons le tableau de var° de f à l'aide du signe de $f'(x)$:

x	0		$40\sqrt{2}$		80
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var° de f	192000	$\searrow$ 0	$\simeq -170039$	$\nearrow$	-64000

$$f(0) = 0^3 - 9600 \times 0 + 192\,000 = 192\,000.$$

$$f(80) = 80^3 - 9600 \times 80 + 192\,000 = -64000.$$

$$f(40\sqrt{2}) = (40\sqrt{2})^3 - 9600 \times 40\sqrt{2} + 192\,000 \simeq -170\,039.$$

b) Sur l'intervalle $[40\sqrt{2}\,; 80]$, $f(x) \leq -64000$.

Donc l'éq° $f(x) = 0$ n'y admet aucune solut°.

En revanche, sur $[0\,; 40\sqrt{2}]$, $f(0) > 0$.

$f(40\sqrt{2}) < 0$.

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,; 80]$.

c) La calculatrice nous indique $d = 20{,}95$ cm.

Finir le n°24 pour le 12/12/20.