21/12/20.

$\boxed{\text{TG - Spé - maths. - F° - ln et exp.}}$

n°14:

1)b) Rappel: Soit f une f° définie sur $I\subset\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $a\in I$

ssi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Or d'après 1)a), $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 1 \in \mathbb{R}$

Ainsi f est dérivable en 0. On en déduit l'éq° de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0:

$$T_0 : \ y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$T_0 : \ y = 1\times x + 0$$

$$\boxed{T_0 : \ y = x.}$$

2)a) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{2\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$= \dfrac{1}{x}\left(2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$.

$\ln(a^b) = b\ln(a).$

$= \dfrac{1}{x}\times\left(\ln(x^2) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$.

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

$= \dfrac{1}{x}\times\ln\left(x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$

$$= \frac{1}{x} \times \ln(x^2+1) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} = f(x).$$

b) Calculons la limite de f en $+\infty$:

D'une part $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée.

D'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)_{x \to +\infty} = \ln(x)_{x \to 1}$$

Aussi, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ Or $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0.$

Par composition de limites on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0.$

Par produit et somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

$$\ln'(u) = \frac{u'}{u}.$$

3) a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$

où $u(x) = \ln(1+x^2)$ $\quad v(x) = x.$

$u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ $\quad v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)} = \frac{\frac{2x}{1+x^2} \times x - \ln(1+x^2)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) On dresse le tableau de variation de f à l'aide du signe de $f'(x)$

Or $\forall x \in]0;+\infty[$, $x^2 > 0$ donc le signe de f' ne dépend que de $g(x)$. D'où :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

n°15 : $\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$ $\quad n \in \mathbb{N}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_n) - 2$. $\qquad v_{n+1} = \underset{\in \mathbb{R}}{q} \times v_n$.

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2.$$

$$v_{n+1} = \ln\left(e\sqrt{u_n}\right) - 2.$$

$$v_{n+1} = \ln(e) + \ln(\sqrt{u_n}) - 2.$$

$$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2.$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1.$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\ln(u_n) - 2\right).$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n.}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0) - 2$.

$$= \ln(e^3) - 2$$

$$= 3 - 2 = 1.$$

2) (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $V_0 = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$

$v_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or $v_n = \ln(u_n) - 2$. $\Longleftrightarrow$ $\ln(u_n) = v_n + 2$.

$\ln(u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$.

3) a). (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = v_n + 2$

$\Longleftrightarrow e^{\ln(u_n)} = e^{v_n + 2}$.

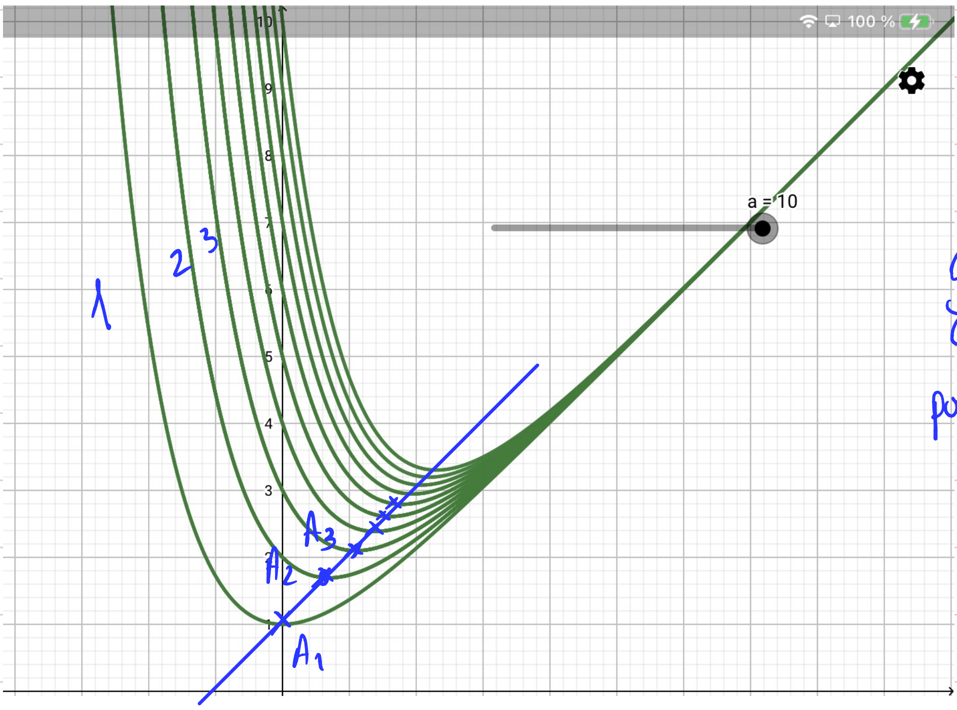
$\Longleftrightarrow u_n = e^{v_n+2}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n + 2 = 2$ $\lim\limits_{x \to 2} e^x = e^2$

Par composition de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^2$.

$\ln(3)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = x + ke^{-x}$. $k \in \mathbb{R}_+^*$



Soit A_k un point de C_f dont l'ordonnée correspond au minimum de de f. Est-ce vrai que les points A_k sont alignés?

$$f_k'(x) = 1 - ke^{-x}.$$

$$f_k''(x) = 0 + ke^{-x} > 0$$

f_k' est st $\nearrow$.

x	$-\infty$	$\ln(k)$	$+\infty$
f_k'	$-$	0	$+$

$$v(x) = -kx + 1$$

$$v(e^{-x}) = -ke^{-x} + 1$$

$$f_k'(x) = 0 \iff 1 - ke^{-x} = 0$$

$$e^{-x} = \frac{1}{k}.$$

$$-x = \ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$-x = -\ln(k)$$

$$x = \ln(k)$$

x	$-\infty$		$\ln(k)$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
f_k	$+\infty$	$\searrow$	$?$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + k e^{-\ln(k)}$$

$$= \ln(k) + k e^{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}$$

$$= \ln(k) + k \times \frac{1}{k}$$

$$= \ln(k) + 1$$

$$M\left(\ln(k) ; \ln(k)+1\right)$$

$$\left(X ; X+1\right)$$