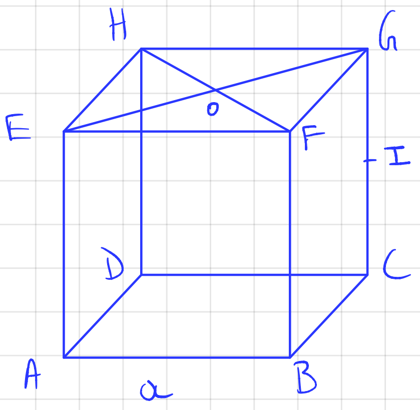
08/03/21

TG : Géométrie dans l'espace : TD

Exercice n°22



2) a)

$$\vec{AO} \cdot \vec{CG} = (\vec{AE} + \vec{EO}) \cdot \vec{CG}$$

$$= \vec{AE} \cdot \vec{CG} + \underbrace{\vec{EO} \cdot \vec{CG}}_{=0}$$

$$= a \times a = a^2$$

2) b)

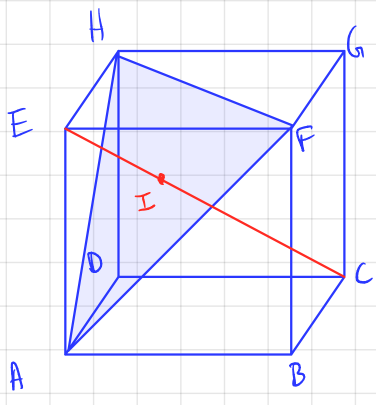
$$\vec{AO} \cdot \vec{GI} = (\vec{AE} + \vec{EO}) \cdot \vec{GI}$$

$$= \vec{AE} \cdot \vec{GI} + \underbrace{\vec{EO} \cdot \vec{GI}}_{=0}$$

$$= a \times \frac{a}{2} \times \cos(\vec{AE} ; \vec{GI})$$

$$= -\frac{a^2}{2}$$

n°23



1)

$$\vec{EA} \cdot \vec{AF} = \vec{EA} \cdot (\vec{AE} + \vec{EF})$$

$$= \vec{EA} \cdot \vec{AE} + \vec{EA} \cdot \vec{EF}$$

$$= -a^2$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AF} = \vec{AB} \cdot (\vec{AB} + \vec{BF})$$

$$= \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BF}$$

$$= a^2$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{AF} = \vec{BC} \cdot (\vec{AB} + \vec{BF})$$

$$= \vec{BC} \cdot \vec{AB} + \vec{BC} \cdot \vec{BF}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

2)

$$\vec{EA} \cdot \vec{AF} + \vec{AB} \cdot \vec{AF} + \vec{BC} \cdot \vec{AF} = -a^2 + a^2 + 0$$

$$\vec{AF} \cdot (\vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BC}) = 0$$

$$\vec{AF} \cdot \vec{EC} = 0$$

Donc $\vec{AF}$ et $\vec{EC}$ sont orthogonaux.

3) On a $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$ et $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ car $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.

Donc $\overrightarrow{EI}$ est normal au plan (AFH)

Or $I \in (AFH)$

Donc I est le projeté orthogonal de E sur (AFH).

4) a)

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EH} &= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}) \cdot \overrightarrow{EH} \\ &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}\right\} \text{(AF) orthogonale à (EH).}$$

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EI} = 0$ donc (AF) et (EI) sont orthogonales.

b) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EH} = 0$ $\quad \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HE} = 0$.

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EI} = 0$.

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EI} = 0.$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot (\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EI}) = 0$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HI} = 0$$

(AF) et (HI) sont orthogonales.

c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{EI} \quad 0$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{EI} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$$

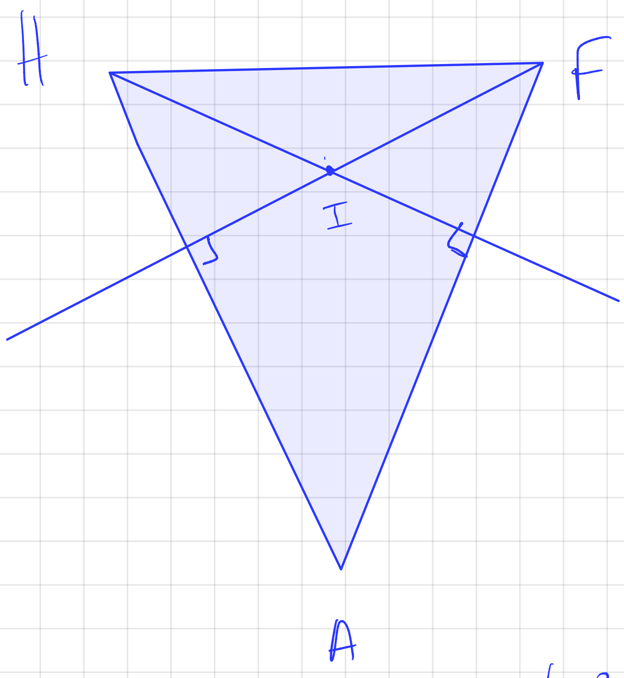
$$\overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{EI} - \overrightarrow{EF}) = 0$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI}) = 0$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FI} = 0.$$

(AH) et (FI) sont orthogonales.

5)



I est l'intersect° des hauteurs du triangle AFH. I est donc son orthocentre.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Exercice n°24

1) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -2\times(-1)+(-1)-1 = 0 = \|\vec{AB}\|\times\|\vec{AC}\|\times\cos(\widehat{BAC})$

$\widehat{BAC} = 90°$.

2) $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $A'\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ $\vec{AA'}\begin{pmatrix}x-6\\y-8\\-2\end{pmatrix}$

Éq° paramétrique de (AA') :

(AA') : $\begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ z = 2+t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

$A'\begin{pmatrix}6\\8\\0\end{pmatrix}$ $B'\begin{pmatrix}4\\9\\0\end{pmatrix}$

$C'\begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix}$

$\vec{A'B'}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{A'C'}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{A'B'}\cdot\vec{A'C'} = 2-1 = 1$

$\vec{A'B'}\cdot\vec{A'C'} = \|\vec{A'B'}\|\times\|\vec{A'C'}\|\times\cos(\widehat{B'A'C'})$

$= \sqrt{(-2)^2+1^2+0^2}\times\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}\times\cos(\widehat{B'A'C'})$.

$= \sqrt{10}\cos(\widehat{B'A'C'}) = 1$.

$$\cos(\widehat{B'A'C'}) = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\widehat{B'A'C'} = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$\widehat{B'A'C'} = 71,56°$$

n°29 : $\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = -2 - t + s \\ z = 2t - s. \end{cases}$ $\quad (s;t) \in \mathbb{R}^2.$

$$\begin{cases} y + z = -2 + t \\ \boxed{t = y + z + 2.} \end{cases}$$

$$s = y + 2 + y + z + 2.$$

$$\boxed{s = 2y + z + 4.}$$

$$x = 1 \cancel{+y} \cancel{+z} + 2 \cancel{-2}y \cancel{-z} - 4$$

$$x = -y - 1$$

$$x + y + 1 = 0.$$