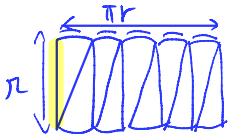
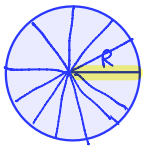




CHAPITRE 14 : MODELISATION DE L'ECOULEMENT D'UN FLUIDE

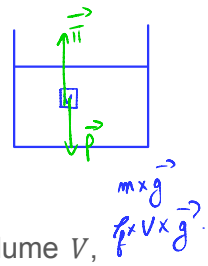
1. LA POUSSEE D'ARCHIMEDE

La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression exercées par un fluide au repos sur un corps immergé dans ce fluide. Pour un fluide à l'équilibre dans un champ de pesanteur uniforme, il n'y a pas de mouvement. En se plaçant dans un référentiel galiléen et en considérant comme système un volume fini V de fluide, pas nécessairement homogène, dont on choisit la forme et la position, les forces s'exerçant sur le volume V sont :

- Le poids $\vec{P}$;
- La résultante des forces de pression $\vec{\Pi}$.

D'après la première loi de Newton :

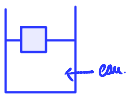
$$\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$$



Ainsi, pour tout objet qui occupe le volume V, quelque soit sa nature, en l'absence de mouvement, la pression dans le fluide est la même que lorsque l'objet est remplacé pour un fluide. La résultante des forces de pression sur un corps dans un fluide s'écrit donc :

$$\vec{\Pi} = -\vec{P}_{fluide\ déplacé}$$

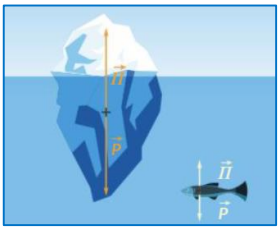
Ainsi, dans le cas où le corps est intégralement immergé dans un fluide de masse volumique uniforme :



$$\vec{\Pi} = -\rho_{fluide} \times V_{immergé} \times \vec{g}$$

Application

On étudie deux situations représentées dans le document suivant :



Tout d'abord, un poisson de volume $V_1 = 500\ cm^3$ immergé dans de l'eau de mer de masse volumique $\rho = 1{,}05\ kg.L^{-1}$. Puis un iceberg de volume $V_2 = 1 \times 10^8\ m^3$, dont la proportion de volume au-dessus de la surface de l'eau est de 10%.

Calculer la valeur des poussées d'Archimède dans les deux situations. Pour l'iceberg, comparer l'action de l'air et celle de l'eau.

Vocabulaire

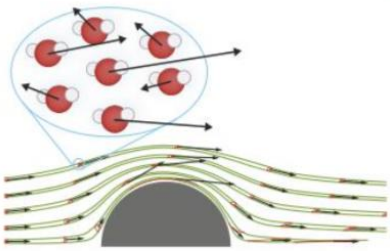
- Densité : rapport entre la masse volumique d'un corps et celle d'un corps de référence : $d = \frac{\rho}{\rho_{eau}}$ pour les liquides et solides ; $d = \frac{\rho}{\rho_{air}}$ pour les gaz.
- Masse volumique : rapport entre la masse d'un corps et son volume : $\rho = \frac{m}{V}$

2. L'ECOULEMENT DES FLUIDES

A. Modèle de la particule fluide

Le fluide est modélisé simplement par un grand nombre de petits volumes appelées **particules fluides**.

La vitesse d'un petit volume de fluide est la vitesse moyenne des entités qui le composent. Une particule fluide compte un nombre important d'entités microscopiques. Les particules fluides sont petites devant les échelles de l'écoulement.



Les particules fluides en rouge peuvent être très déformées durant leur passage dans l'écoulement. Les tubes de courant (en vert) se comportent comme des tuyaux qui entourent les particules fluides. Le vecteur vitesse de chaque particule fluide est représenté en noir.

B. Mouvement du fluide

Bien qu'un fluide soit beaucoup plus complexe qu'un solide ou un point matériel, sont étude se fait de la même manière : en se plaçant dans un référentiel galiléen et en commençant toujours par définir un système d'étude, ici une particule fluide.

Le mouvement du fluide est décrit par un champ de vitesse, qui est l'ensemble des vectrices vitesses de toutes les particules du fluide.

La **ligne de courant** correspond aux trajectoires suivies par les particules fluides. Si le mouvement du fluide n'est pas trop compliqué, il reste confiné dans des **tubes de courant**, c'est-à-dire des ensembles de lignes de courant qui se déforment au sein de l'écoulement. L'exemple le plus simple de tube de courant est le contour d'un tuyau, que le fluide ne peut jamais traverser.

C. Conservation du débit volumique

Pour caractériser les écoulements, on introduit une nouvelle grandeur, le **débit volumique** D_V :

$$D_V = \frac{dV}{dt}$$

- D_V est le débit volumique en $m^3.s^{-1}$;
- V est le volume de liquide écoulé en m^3 ;
- t est le temps en s.

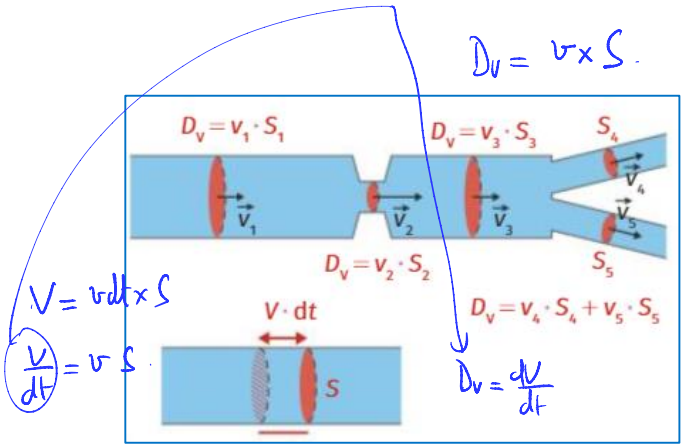
La masse d'une particule fluide reste constante au cours du temps. Pour un écoulement incompressible, le volume d'une particule fluide reste constant même si elle se déforme. Il existe alors une relation entre le débit volumique D_V et la surface S traversée par le liquide :

$$D_V = v \times S$$

- D_V est le débit volumique en $m^3.s^{-1}$;
- v est la vitesse d'écoulement en $m.s^{-1}$;
- S est la surface traversée par l'écoulement en m^2.

Si l'écoulement est aussi permanent, il y a conservation du débit volumique. Le long d'un tube de courant, le débit volumique est constant et uniforme :

$$D_V = v_1 \times S_1 = v_2 \times S_2$$



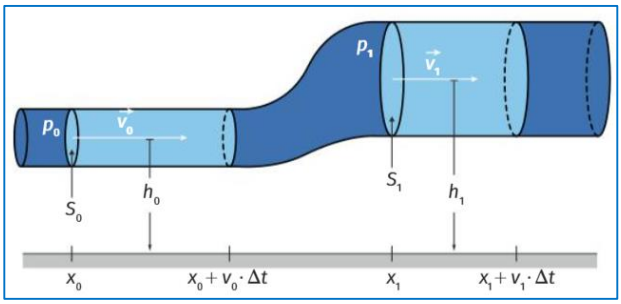
Cette loi de conservation est très utile pour calculer des vitesses en différents points d'un écoulement.

Vocabulaire :

- Ecoulement incompressible : écoulement où la masse volumique ρ est uniforme et constante.
- Ecoulement permanent : écoulement où le vecteur vitesse $\vec{v}$ est indépendant du temps, mais peut varier avec la position. On parle également d'écoulement stationnaire.

3. DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

A. Relation de Bernoulli



En l'absence de forces de frottement et dans l'hypothèse du fluide parfait, l'énergie mécanique d'une particule fluide est constante au cours de son déplacement. En prenant en compte son énergie cinétique, son énergie potentielle de pesanteur et son énergie potentielle liée aux forces de pression, Bernoulli a démontré, pour un écoulement permanent et incompressible :

$$\rho \times \frac{v_0^2}{2} + \rho \times g \times h_0 + p_0 = \rho \times \frac{v_1^2}{2} + \rho \times g \times h_1 + p_1$$

- ρ est la masse volumique du fluide en $kg.m^3$;
- v_0 et v_1 sont les vitesses d'écoulement en $m.s^{-1}$;
- g est l'intensité de la pesanteur en $N.kg^{-1}$;
- h_0 et h_1 hauteurs des points de mesure en m
- p_0 et p_1 sont les pressions aux points de mesure en Pa.

B. Effet Venturi

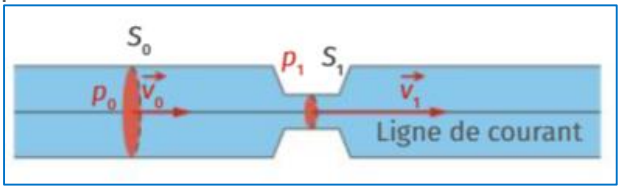
Lorsqu'un fluide arrive dans une conduite qui se resserre ou lorsque le tube de courant d'un écoulement change de taille, la loi de Bernoulli permet de déterminer les propriétés de l'écoulement. On suppose la conduite horizontale afin de négliger l'effet de la pesanteur. D'après la conservation du débit volumique $S_0 \times v_0 = S_1 \times v_1$ et avec la loi de Bernoulli :

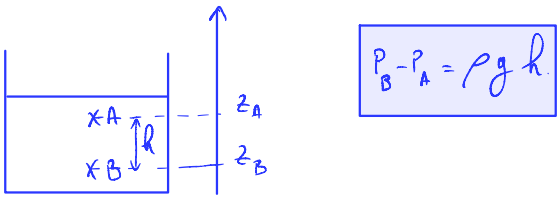
$$\rho \times \frac{v_0^2}{2} + p_0 = \rho \times \frac{v_1^2}{2} + p_1$$

$$p_1 = p_0 + \rho \times \frac{v_0^2 - v_1^2}{2}$$

$$p_1 = p_0 + \rho \times \frac{v_0^2}{2} \times \left(1 - \left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2\right)$$

Ainsi, pour une conduite horizontale, lorsque la section diminue, la vitesse augmente et la pression diminue. C'est l'effet Venturi.





L'effet Venturi est mis à profit dans de nombreuses applications, pour mesurer des vitesses ou pour réaliser une trompe à vide, utilisée en chimie. Le résultat principal est surprenant, car on pourrait s'attendre à une augmentation de la pression puisqu'on appuie sur le fluide pour le faire rentrer dans un rétrécissement du tube.

4. EXERCICES

Exercice n°1

- Exprimer, puis calculer la valeur de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur une montgolfière.

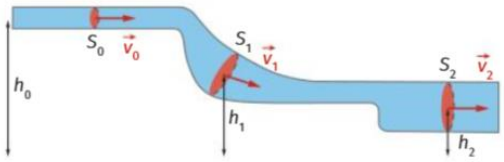
Données

- **Volume de la montgolfière :** $V = 900\ \text{m}^3$
- **Intensité de pesanteur :** $g = 9{,}81\ \text{N·kg}^{-1}$
- **Masse volumique de l'air :** $\rho_{air} = 1{,}3\ \text{kg·m}^{-3}$

Exercice n°2

- Exprimer, puis calculer la vitesse de l'écoulement de débit volumique $5{,}1\ \text{L·min}^{-1}$ sortant d'un robinet de section $1{,}3\ \text{cm}^2$.

Exercice n°3



1. À l'aide du schéma ci-dessus, exprimer le débit volumique à travers les trois profils S_0, S_1 et S_2.
2. Exprimer les vitesses v_1 et v_2 en fonction de S_1, S_2, S_0 et v_0.
3. En utilisant la relation de Bernoulli, exprimer la pression sur chaque surface S_1 et S_2 en fonction de la pression p_0 de la vitesse v_0, et des autres paramètres du système.

Exercice n°4

Titan, lune glacée de Saturne, possède une atmosphère et des océans d'hydrocarbures liquides.

Thomas étudie un iceberg de masse volumique $\rho_0 = 0{,}4 \times 10^3\ \text{kg·m}^{-3}$ et de masse $m = 25\ \text{kg}$, flottant sur une mer d'éthane liquide de masse volumique $\rho_1 = 0{,}54 \times 10^3\ \text{kg·m}^{-3}$. Sur Titan, l'intensité de pesanteur est égale à $g = 1{,}35\ \text{N·kg}^{-1}$.

1. Faire un bilan des forces sur l'iceberg.
2. Calculer la poussée d'Archimède subie par l'iceberg.
3. Calculer le volume, puis la masse de la partie immergée de l'iceberg.

Exercice n°5

Le *Suffren* est un sous-marin nucléaire d'un volume de $5300\ \text{m}^3$, modélisé par un cylindre de 100 m de long. À la surface, la hauteur immergée est de 7,3 m.

1. Justifier que le diamètre du sous-marin est égal à $d = 8{,}2\ \text{m}$.
2. En effectuant un bilan des forces sur le sous-marin, flottant à la surface de l'eau, calculer sa masse, puis sa densité, sachant que le volume immergé est de $4650\ \text{m}^3$.
3. Pour plonger, le sous-marin fait entrer de l'eau dans des ballasts situés dans sa structure. Calculer la masse d'eau minimale à faire rentrer pour plonger.

Exercice n°6

Une série de pesées avec une balance hydrostatique donne $m_1 = 1{,}830\ \text{kg}$ pour le système rempli d'eau, $m_2 = 1{,}950\ \text{kg}$ lorsqu'un objet est immergé, suspendu, et $m_3 = 250\ \text{g}$ pour l'objet seul. En faisant un bilan des forces pour chaque étape, on peut écrire :

$$\rho_{objet} = \rho_{eau} \cdot \frac{m_3}{m_2 - m_1}$$

- Déterminer la masse volumique de l'objet.

Données

- **Intensité de pesanteur :** $g = 9{,}81\ \text{N·kg}^{-1}$
- **Masse volumique de l'eau :** $\rho_{eau} = 1{,}00 \times 10^3\ \text{kg·m}^{-3}$

Exercice n°7

Un ballon-sonde possède une enveloppe de 80,0 m^3, de masse négligeable, et une nacelle d'instruments scientifiques et de communication de 30 kg.

1. Réaliser un bilan des forces exercées sur le ballon.
2. Calculer la valeur de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur ce ballon.
3. Calculer la valeur et justifier le sens de la résultante des forces sur le ballon rempli d'hélium.
4. Calculer la valeur de la résultante des forces sur le ballon rempli de dihydrogène.
5. En effectuant une recherche rapide, expliquer pourquoi l'hélium est plus utilisé que le dihydrogène.

Données

- **Masse volumique de l'air :** $\rho_{air} = 1{,}27\ kg{\cdot}m^{-3}$
- **Masse volumique de l'hélium :** $\rho_{hélium} = 0{,}16\ g{\cdot}L^{-1}$
- **Densité du dihydrogène par rapport à l'air :** $d_{dihydrogène} = 6{,}2 \times 10^{-2}$

Exercice n°8

Dans l'aorte, artère principale à la sortie du cœur considérée comme un tuyau de diamètre égal à 32 mm, le sang circule à une vitesse moyenne de 50 $cm{\cdot}s^{-1}$.

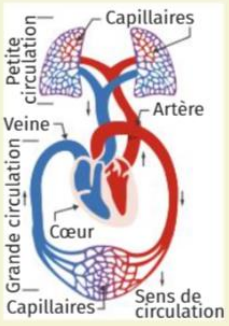
L'aorte se divise en artères, puis en artérioles. Dans ces dernières, le sang circule à la vitesse de 20 $cm{\cdot}s^{-1}$.

1. Calculer la surface totale de section des artérioles.

Les artérioles se divisent à nouveau en capillaires. Les capillaires ont une surface totale de section de 4 000 cm^2.

2. Calculer la vitesse du sang dans un capillaire.

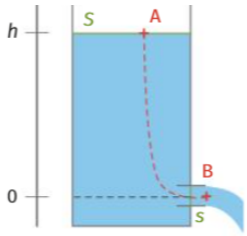
Capillaires



Les capillaires mesurent quelques micromètres de diamètre et l'écoulement en leur sein est visqueux. Il n'est alors pas possible de le modéliser avec la formule de Bernoulli. La circulation sanguine est étudiée depuis l'Antiquité, mais la circulation dans les capillaires n'a été découverte par Ibn al-Nafis qu'au XI^e siècle.

Exercice n°9

Un vase de section S, percé à une profondeur h par un petit trou de section s, se vide lentement. On suppose que la pression en A et B est identique, soit $p_B = p_A = p_0$, avec p_0 la pression atmosphérique.



1. Exprimer la relation de Bernoulli entre les points A et B.
2. À l'aide de la conservation du débit volumique, exprimer la vitesse v_A en fonction de v_B, S et s.
3. Exprimer v_B en fonction de h, S et s.

5. EXERCICE TYPE BAC

Exercice n°1

Le *Saint-Exupéry* est le plus grand porte-conteneurs français. Il est modélisé par un parallélépipède rectangle d'une longueur de $L = 400$ m, d'une largeur $l = 50$ m et d'une hauteur moyenne de 25 m.

1. Lorsqu'il est vide, il s'enfonce dans l'eau de $h_v = 2{,}0$ m. Calculer sa masse.
2. En pleine charge, la hauteur d'enfoncement vaut $h_c = 16$ m. Calculer la masse de conteneurs chargés.

Les forces de frottement du bateau avec la mer sont modélisées par une force de valeur $F = \rho_{eau} \cdot C_X \cdot L \cdot h \cdot v^2$, avec C_X un coefficient valant $C_X = 0{,}007$.

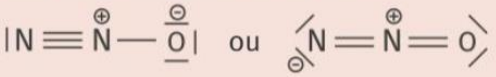
3. Réaliser un bilan des forces sur le bateau. Exprimer l'énergie nécessaire pour parcourir une distance d, puis la puissance des forces de frottement.

Le pouvoir calorifique du fioul lourd est de 50 $MJ{\cdot}kg^{-1}$.

4. Calculer la masse de combustible consommée par le porte-conteneurs à charge, puis à vide, pour une vitesse de 41 km·h^{-1} et pour une distance de 100 km.
5. Calculer la consommation du porte-conteneurs à charge, puis à vide, pour une vitesse de 35 km·h^{-1}.
6. Calculer le pourcentage d'économie réalisée.

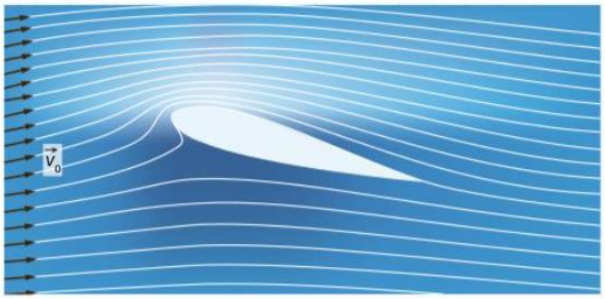
Pollution maritime

Le secteur maritime est un des secteurs les plus polluants de la planète à cause de ses émissions de CO_2. De plus, la faible qualité des fiouls marins en fait une source importante de pollution au protoxyde d'azote et au dioxyde de soufre.



Toutefois, le transport maritime pollue environ dix fois moins rapporté à la masse transportée par la distance parcourue que le transport par camion.

Exercice n°2



Le schéma ci-dessus montre les lignes de courant de l'écoulement autour d'une aile d'avion se déplaçant à $v_0 = 90$ km·h^{-1}, de longueur $L = 10$ m. Chaque ligne de courant est espacée de 20 cm à l'abscisse $x = 0$ m.

L'écoulement est stationnaire et incompressible. La pression loin de l'aile est $p_0 = 1013$ hPa. On se place dans le référentiel de l'avion.

1. À l'aide de la conservation du débit volumique, calculer la vitesse moyenne de l'écoulement au-dessus et en dessous de l'aile. Mesurer sur le dessin l'écartement entre les lignes de courant.
2. À l'aide de la relation de Bernoulli, calculer la différence de pression entre le bas de l'aile et le haut de l'aile.
3. Calculer la force de portance sur l'aile. La largeur l sera évaluée à l'aide du schéma.
4. L'avion a une masse de 800 kg. En réalisant un bilan des forces, calculer la vitesse minimale v_{min} pour que l'avion décolle.
5. En altitude $\rho_{air}(z) = \rho_{air}(0) \cdot \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = 8$ km. Calculer l'altitude maximale que l'avion peut atteindre, en supposant que la vitesse v_0 reste inchangée.

Pour mesurer la vitesse de l'avion, le pilote utilise un tube de Pitot (**doc. 2**) muni de deux manomètres pour mesurer les pressions p_A et p_B.

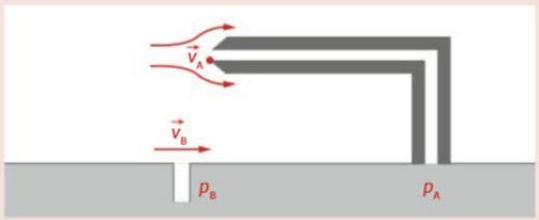
6. Justifier pourquoi on peut considérer $v_A = 0$ m·s^{-1}.
7. À l'aide de la relation de Bernoulli, exprimer la relation entre la vitesse de l'avion et la différence de pression mesurée. On prendra $\rho_{air}(z) = \rho_{air}(0)$.
8. Si la même mesure est réalisée au sol et à une altitude de 5 km, prévoir la différence de vitesse lue. Utiliser la formule pour la masse volumique de l'air donnée en question 5.

Donnée

- **Masse volumique de l'air :** $\rho_{air} = 1{,}23$ kg·m^{-3}

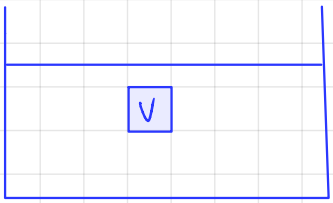
Doc. 1 Aile d'avion

Doc. 2 Schéma d'un tube de Pitot



14/03/21.

TG : Mécanique des fluides.



$$\vec{P_a} = -\rho_{fluide} \times V \times \vec{g}$$

$$\vec{P} + \vec{P_a} = \vec{0}$$

$$\vec{P_a} = -\vec{P}$$

$$\vec{P_a} = -m\vec{g}$$

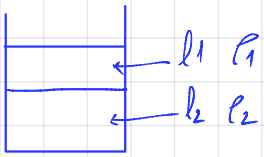
Application n°1.

$$\Pi_{poisson} = \rho \times V_{poisson} \times g = 1{,}05 \times 500 \times 10^{-3} \times 9{,}81$$

$$= \boxed{5{,}15\ N}$$

$$\Pi_{iceberg} = \rho \times V_2 \times g = 1{,}05 \times 0{,}90 \times 1 \times 10^8 \times 10^3 \times 9{,}81 = \boxed{9 \times 10^{11}\ N}$$

10^{12}



$\boxed{\rho_1 < \rho_2}$

$$P \geq \Pi$$

$$m_0 \times g \geq m_f \times g$$

$$\rho_0 \times V_0 \geq \rho_f \times V_0$$

$$\Pi_{air,iceberg} = \rho_{air} V_{\acute{e}m} \times g = 1{,}3 \times 0{,}10 \times 1 \times 10^8 \times 9{,}81$$

$$= 1 \times 10^8\ N.$$

$$P_1 = P_0 + \rho \frac{V_0^2}{2}\left(1 - \left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2\right)$$

$$P_1 = P_0 + \rho\frac{V_0^2}{2} - \rho\frac{V_0^2}{2}\left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2$$

$$P_1 = P_0 + \rho \times \frac{V_0^2 - V_1^2}{2}$$

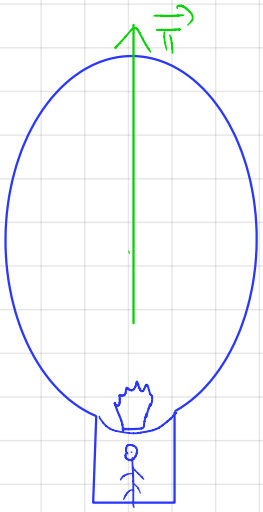
$$P_1 = P_0 + \rho\frac{V_0^2}{2} - \frac{\rho V_1^2}{2}$$

$$V_1 S_1 = V_0 S_0$$

$$\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^2 = \left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2$$

$$V_1^2 = V_0^2\left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2$$

Exercice n°1 :



$$\vec{\Pi} = -\rho_{air} \times V \times \vec{g}$$

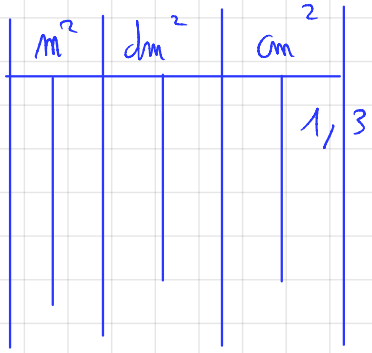
$$\Pi = \rho_{air} \times V \times g = 1{,}3 \times 900 \times 9{,}81$$

$$\boxed{\Pi = 1{,}1 \times 10^4 \text{ N}}$$

Exercice n°2 :

$$D_V = V \times S$$

$$V = \frac{D_V}{S}$$

$$V = \frac{5{,}1 \text{ L} \times 10^{-3}}{1{,}3 \text{ cm}^2 \cdot \text{ min} \times 10^{-4} \times 60}$$

$$v = 0{,}65 \text{ m/s}$$