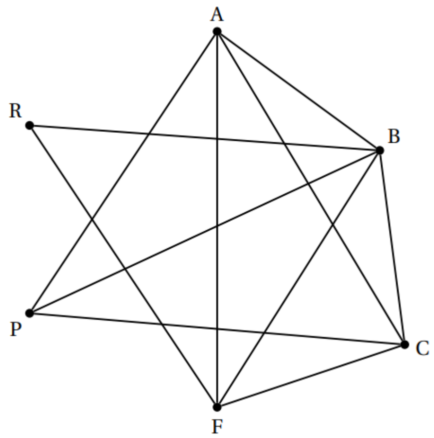
Exercice bilan : généralités sur les graphes

L'organisatrice d'une course à pied dans la ville de Berlin voudrait faire passer les participants par les lieux suivants :

- Alexanderplatz (A)
- Porte de Brandebourg (B)
- Checkpoint Charlie (C)

- Fleamarket (F)
- Musée de Pergame (P)
- Reichstag (R)

On peut résumer la situation par le graphe ci-dessous :



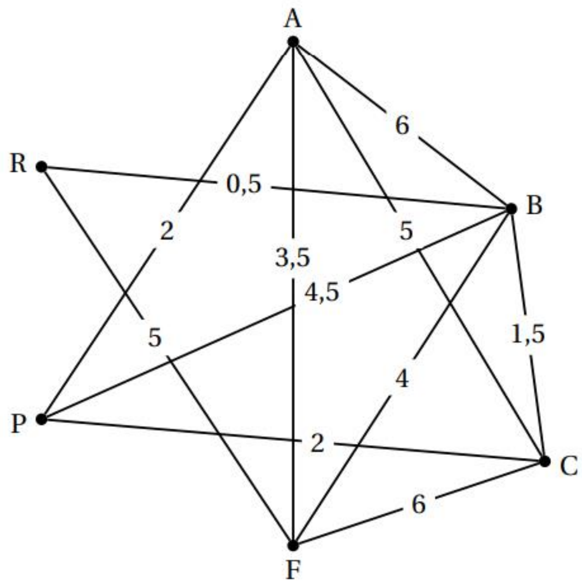
Les lieux sont représentés par les sommets, et les rues ouvertes à la course par les arêtes.

1. **a.** Quel est l'ordre de ce graphe ?
   b. Est-il complet ? Justifier.
   c. Est-il connexe ? Justifier.
2. **a.** L'organisatrice peut-elle envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues ? Justifier.
   b. Peut-elle envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues, et dont le départ et l'arrivée se font au même endroit ?
3. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe, en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.
4. On admet que :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 11 & 12 & 10 & 5 \\ 13 & 12 & 13 & 12 & 11 & 8 \\ 11 & 13 & 10 & 12 & 10 & 5 \\ 12 & 12 & 12 & 8 & 7 & 7 \\ 10 & 11 & 10 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 5 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

   Combien de parcours peut-on envisager d'Alexanderplatz au Reichstag passant par exactement 3 rues ?
   Justifier la réponse.

5. L'organisatrice veut également prévoir un autre parcours pour les coureurs moins expérimentés. Ce parcours doit débuter à Alexanderplatz et se terminer au Reichstag.
   Les distances entre les différents lieux sont indiquées en kilomètres sur le graphe ci-dessous.



Déterminer le parcours le plus court possible d'Alexanderplatz au Reichstag. Donner sa longueur.