12/10/21

Première générale : Suites numériques

Correction des exercices.

×2 ×2 ×2 ×2

2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32

Rappel : Suite géométrique.

Déf° explicite : $V_n = V_0 \times q^n$ (V_0 : 1ère terme, q : raison)

Déf° récursive : $\begin{cases} V_{n+1} = q \times V_n \\ V_0 \text{ connu.} \end{cases}$

Ex : $V_n = 3 \times 2^n$.

$$\sum_{i=0}^{n} V_i = V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$U_0 = 4800$

1) **Contrat n°1**

Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5 % du loyer chaque année.

a) Calculer le loyer u_1 payé la deuxième année. On appelle u_0 le loyer de la 1re année.

b) Exprimer u_n - loyer de la $(n + 1)^e$ année - en fonction de n. Calculer u_8 (loyer de la 9e année)

c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat.

2) **Contrat n°2**

Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 280 euros chaque année.

a) Calculer le loyer v_1 payé pour la deuxième année. On appelle v_0 le loyer de la 1re année.

b) Exprimer v_n - loyer de la $(n + 1)^e$ année - en fonction de n. Calculer v_8 (loyer de la 9ème année)

c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat. Quel est le contrat le plus avantageux ?

1)a) $U_1 = U_0 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)$

$U_1 = 4800 \times 1{,}05$.

$U_1 = 5040 €$.

$U_2 = U_1 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)$

b) (U_n) est une suite géométrique car on multiplie systématiquement par $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05 = q$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = U_0 \times q^n$

$U_n = 4800 \times 1{,}05^n$.

D'où $U_8 = 4800 \times 1{,}05^8 \approx 7092$.

c) $U_0 + U_1 + \dots + U_8 = U_0 \times \frac{1 - q^9}{1 - q} = 4800 \times \frac{1 - 1{,}05^9}{1 - 1{,}05} = 52\,928 €$.

2) a) $V_1 = V_0 + 280 = 4800 + 280 = 5080$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 + n \times r = 4800 + 280n$.

D'où $v_8 = 4800 + 280 \times 8 = 4800 + 2240$

$= 7040.$

c) $V_0 + V_1 + \dots + V_8 = 9 \times \dfrac{(4800 + 7040)}{2} = \dfrac{9 \times 11840}{2} = 9 \times 5920$

$= 53280$ €.

EXERCICE 15

Forage

Une entreprise estime le coût d'un forage ainsi :

- le premier mètre coûte 1 000 euros.
- Le second mètre coûte 1 050 euros et chaque mètre supplémentaire coûte 50 euros de plus que le précédent.
- On dispose d'un crédit de 519 750 €.

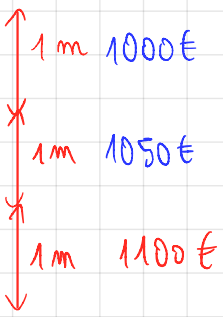
1) Proposer un programme permettant de connaître la profondeur du forage.

2) On appelle (u_n) la suite telle que $u_1 = 1\,000$ et u_n représente de coût du n^e mètre.

   a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison. Exprimer alors u_n en fonction de n.

   b) Montrer que le nombre de mètres n que l'on peut forer avec le crédit alloué vérifie : $n^2 + 39n - 20\,790 = 0$

   c) Retrouver le résultat de la question 1)



1)

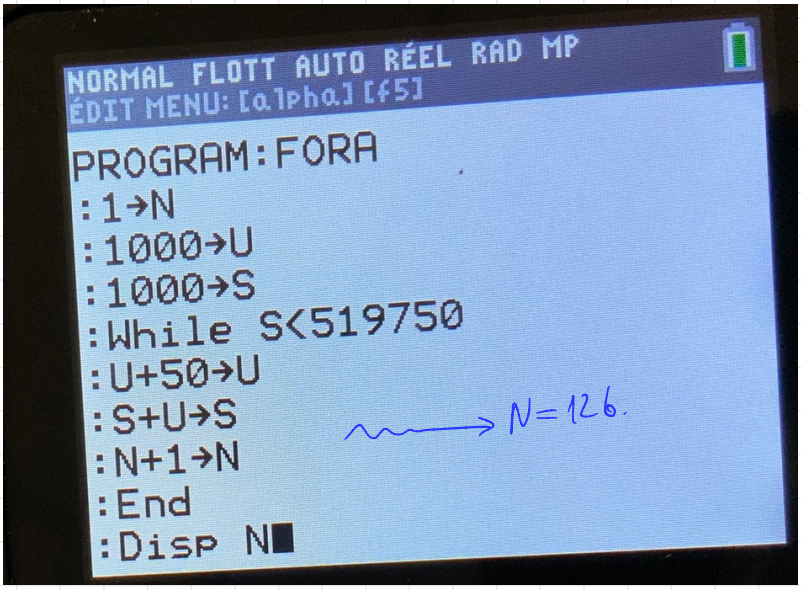
```
1 → N
1000 → u
1000 → S
Tant que S < 519 750
    u + 50 → u
    S + u → S
    N + 1 → N
Fin tant que.
Afficher N.
```

Initialisat° des variables

u : coût du $n^{ème}$ m

S : somme totale dépensée

N : profondeur creusée en m.



2)a) Le coût de chaque mètre supplémentaire augmente de 50 €. Il s'agit donc d'une suite arithmétique de raison $r = 50$ et de premier terme $U_1 = 1000$.

$$U_n = U_1 + (n-1) \times r.$$

$$U_n = 1000 + (n-1) \times 50.$$

$$U_n = 1000 + 50n - 50$$

$$U_n = 950 + 50n.$$

2)b) $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = 519\,750.$

$$n \times \frac{(1000 + 950 + 50n)}{2} = 519\,750.$$

$$2 \times \frac{n(1950 + 50n)}{2} = 519\,750. \times 2$$

$$1950n + 50n^2 = 1\,039\,500$$

$$\frac{50n^2 + 1950n - 1\,039\,500}{50} = \frac{0}{50}.$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

$$\frac{50n^2}{50} + \frac{1950}{50}n - \frac{1\,039\,500}{50} = 0.$$

$$n^2 + 39n - 20\,790 = 0.$$

c) $\Delta = 39^2 - 4 \times 1 \times (-20\,790)$

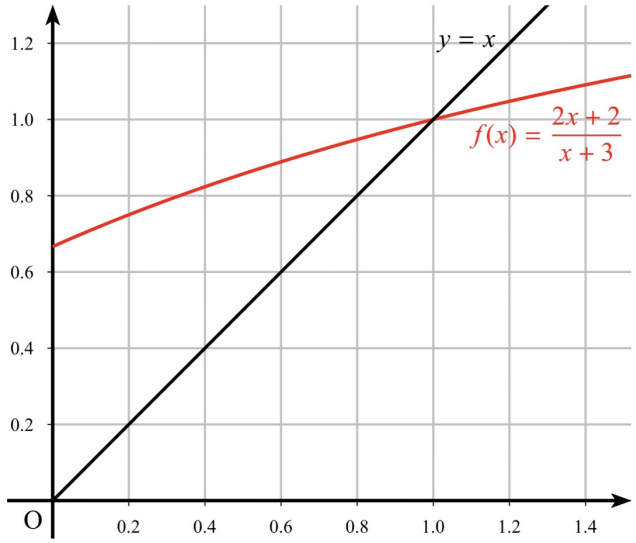
$\Delta = 84\,681 > 0$

$$n_1 = \frac{-39 - \sqrt{84\,681}}{2} < 0.$$

$$n_2 = \frac{-39 + \sqrt{84\,681}}{2} = 126.$$

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 3}$.

1) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur la représentation ci-desssous. Conjecturer alors limite de la suite (u_n).



$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2) On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

a) Prouver que la suite (v_n) ainsi définie est géométrique.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Quelle est la limite de (v_n) ? En déduire la limite de (u_n).

2)a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on veut prouver que $\boxed{v_{n+1} = q \times v_n}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{2u_n+2}{u_n+3} - 1 \times (u_n+3)}{\frac{2u_n+2}{u_n+3} + 2\frac{(u_n+3)}{1 \times (u_n+3)}} = \frac{\frac{2u_n+2-(u_n+3)}{u_n+3}}{\frac{2u_n+2+2(u_n+3)}{u_n+3}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n - 1}{u_n+3}}{\frac{4u_n+8}{u_n+3}} = \frac{u_n-1}{u_n+3} \times \frac{u_n+3}{4u_n+8}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{4u_n + 8}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{4(u_n + 2)} = \frac{1}{4} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4} \times v_n$$

Ainsi, (v_n) est bien géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme :

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{0 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}.$$

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2)b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$

$v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Or $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

$\Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = 1 \times (u_n - 1)$

$\Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$

$\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -1 - 2v_n$.

$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$.

$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1}$

$v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

$-1 < \frac{1}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.