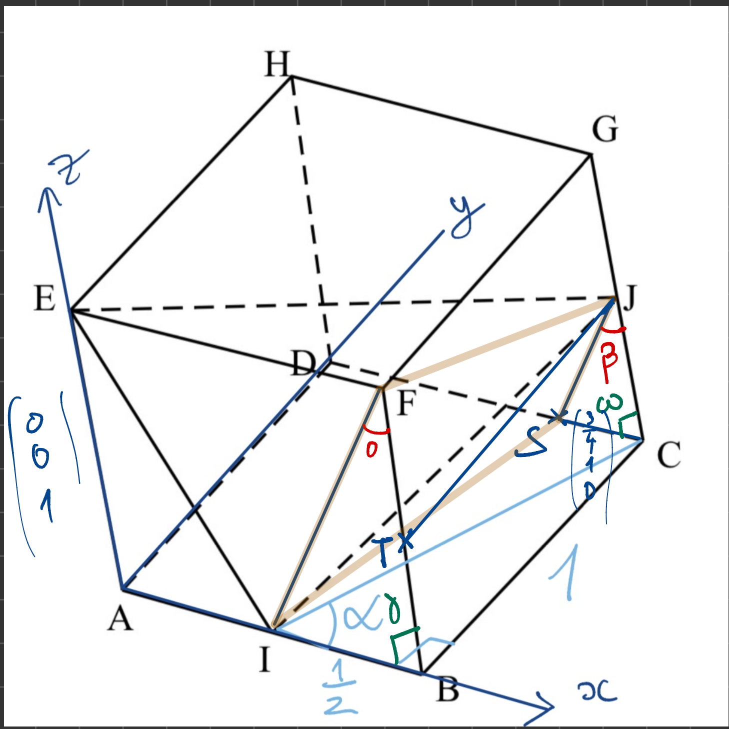
Samedi 29 janvier 2022.

TG : Spé-Maths – Géométrie dans l'espace

Plus De Bonnes Notes

Ex 033 :

8.



Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant au premier est sécant au second et les intersections sont parallèles.

$(FI) // (JS)$

et

$(FB) // (JC)$.

Donc $o = \beta$ et $\gamma = \omega$ donc les triangles IBF et SCJ sont semblables. Par conséquent $SC = \frac{1}{2} IB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$.

FAUSSE

Produit vectoriel HP.

Méthode 2 : (ABC) : $z = 0$ $\quad 0x + 0y + 1z + 0 = 0$.

$\vec{V}^2 \longrightarrow \vec{V}$

$(\vec{u} ; \vec{v}) \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

(FIJ) : $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $I\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$J\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{FI} \wedge \overrightarrow{FJ} = \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\quad 4\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(FIJ) : $ax + by + cz + d = 0$.

$4x - y - 2z + d = 0$.

$4 \times \frac{1}{2} - 0 - 2 \times 0 + d = 0$.

Or $I\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in (FIJ)$.

$d = -2$.

$(FIJ) : 4x - y - 2z - 2 = 0$.

Éq° paramétrique (DC) : $\vec{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$(DC)\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$4t - 1 - 2\times 0 - 2 = 0.$$

$$4t - 3 = 0$$

$$t = \frac{3}{4}$$

$(DC) \cap (FIJ) = S\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\1\\0\end{pmatrix}$.

9. $\vec{FI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{FI} = 2 + 0 - 2 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{FI}$.

$\vec{u}\cdot\vec{FJ} = 0 + 1 - 1 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{FJ}$.

$\vec{u}$ est normal à deux vecteurs non colinéaires de (FIJ). donc $\vec{u}$ est normal au plan (FIJ).

10. Calculons le volume du tétraèdre :

$$V = \frac{1}{3}\text{ aire de base} \times h.$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1\times 1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

EXO 36 :

1) Le point A appartient-il à la droite (d) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$?

$A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad 5 - 2t = 1$ $\quad -1 + t = 1$ $\quad -2 + t = 0$

$\quad t = 2.$ $\quad t = 2$ $\quad t = 2$

$A \in d$.

$B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad 5-2t=3 \quad -1+t=0 \quad -2+t=-1$

$-2t=-2 \quad t=1 \quad t=1$

$t=1$

$A \in d.$

VRAI.

2. On étudie l'orthogonalité des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et de (AB) : $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u}.\vec{v} = -4+1+3=0.$

Donc $\mathcal{D}$ et (AB) sont orthogonales.

3. $\mathcal{D}$ et (AB) sont orthogonales donc non parallèles. Voyons si elles sont sécantes :

$$\begin{cases} 2t = 5-2s \\ 1+t = -1+s. \end{cases} \iff \begin{cases} 2(-2+s) = 5-2s. \\ t = -2+s. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -4+2s = 5-2s. \\ t = -2+s \end{cases} \iff \begin{cases} s = \frac{9}{4}. \\ t = -2+\frac{9}{4} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Vérifions si ces valeurs sont compatibles avec les expressions de z :

- $-5+3\times\frac{1}{4} = -5+\frac{3}{4} = \frac{-17}{4}.$
- $-2+\frac{9}{4} = \frac{1}{4}.$

Ni parallèles, ni sécantes, $\mathcal{D}$ et (AB) sont non coplanaires.

4. On cherche l'intersection de P et de $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} \begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=-5+3t \end{cases} \qquad P : \ x-y+3z+1=0.$$

D'où $2t - (1+t) + 3(-5+3t) + 1 = 0.$

$$2t - 1 - t - 15 + 9t + 1 = 0$$

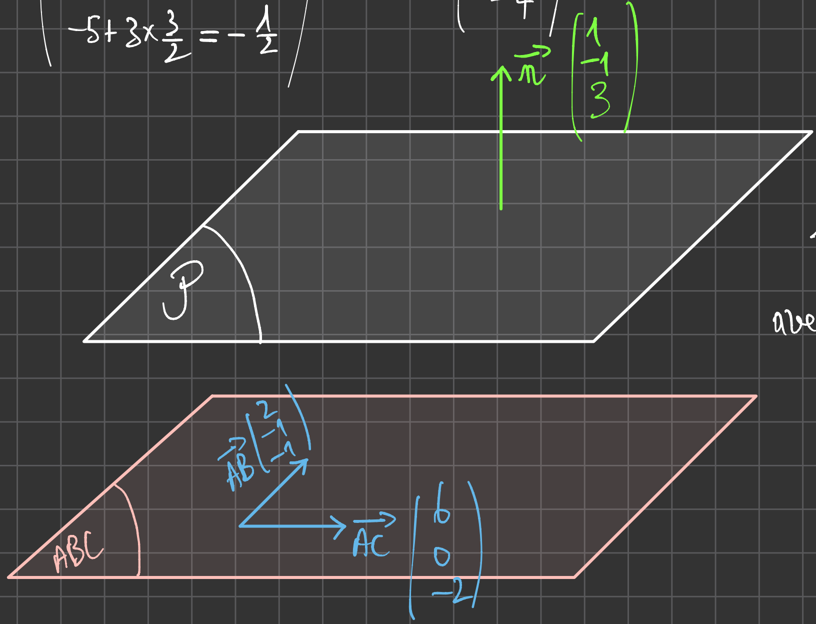
$$10t = 15.$$

$$t = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

$$I\begin{pmatrix} 2 \times \frac{3}{2} = 3 \\ 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \\ -5 + 3 \times \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq E\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Je fausse.

5.



Vérifions l'orthogonalité de $\vec{n}$ avec $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 2 + 1 - 3 = 0. \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 6 + 0 - 6 = 0 \end{array}\right\}$$ (ABC) et $\mathcal{P}$ sont parallèles.

EX 042: