Plus De Bonnes Notes

Mardi 25 janvier 2022.

Première générale: Fonction exponentielle.

Rappels: $D_f = \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$.   fonction exponentielle

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0.$$

$\Rightarrow$ elle est unique.

$f(x) = \exp(x)$.

$\exp(8) = \exp(3) \times \exp(5)$. VRAI.

EXO 3: Démontrons que $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$

$h(0) = \dfrac{\exp(0+b)}{\exp(b)} = \dfrac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$.

2) $u(x) = x^2$ $v(x) = 2x - 3$. $u(x) = x^2$

$u \circ v\ (x) = u(v(x)) = (2x-3)^2$. $u(2) = 2^2$

$v \circ u\ (x) = 2x^2 - 3$. $u(3) = 3^2$

$v(x) = 2x - 3$. $v(2) = 2 \times 2 - 3$ $u(b) = b^2$

$v(abc) = 2\,abc - 3$ $u(abc) = (abc)^2$

$v(u(x)) = 2 \times u(x) - 3 = 2x^2 - 3$. $u(v(x)) = (v(x))^2 = (2x-3)^2$

Plus De Bonnes Notes

Théorème : Soit u une fonction définie sur I

v une fonction définie sur J (avec $\mathrm{Im}(u) \subset J$).

$f(x) = v(u(x)) = v \circ u\,(x)$.

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)).}$$

$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{affine}} \mathbb{R}$

$x \longmapsto x+b$.

$x+b \xrightarrow{\exp} \exp(x+b)$

$$\boxed{h'(x) = h(x).}$$

Or $h(x) = \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(b)} = \dfrac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b)$

$f(x) = k \times u(x)$

$f'(x) = k \times u'(x)$

Si $u(x) = x+b$.

$v(x) = \exp(x)$.

$v(a) = \exp(a)$

$v(u(x)) = \exp(x+b)$

$$h'(x) = \frac{1}{\exp(b)} \times 1 \times \exp(x+b).$$

5

3+2

$$h'(x) = \frac{\exp(x+b)}{\exp(b)} = h(x).$$

3. h obéit exactement aux mêmes propriétés que exp. Or exp est unique donc $h = \exp$.

$$h(x) = \exp(x) \iff \frac{\exp(x+b)}{\exp(b)} = \exp(x).$$

4. $h(a) = \exp(a)$. $\iff \dfrac{\exp(a+b)}{\exp(b)} = \exp(a)$.

$$\iff \boxed{\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b).}$$

EXO 4 :

Soit $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) = \exp(x) \times \exp(-x) = 1$.

$$\iff \boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}}$$

EXO 5 : 1.

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$x - y = x + (-y)$.

$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Plus De Bonnes Notes

2. $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x) \times \exp(-y)$.

$= \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)}$

$= \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

$3+2$

$5 \times 3 = 3+3+3+3+3$.

$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

$2+3 = 2+1+1+1 = 1+1$

$\exp(nx) = \exp(\overbrace{x+x+x+\dots+x}^{n \text{ termes}})$.

$= \exp(x) \times \exp(x) \times \dots \times \exp(x)$.

$= (\exp(x))^n$.

$a+a = 2a$

$a+a+a = 3a$.

$a+a+a+\dots+a = na$.

$10 \div 2 = 5$.

$10-2-2-2-2-2$.

Pierre > Ciseau > feuille.

$\frac{10}{0}$

$10-0-0-0\dots = 0$.

EXO n°6:

$A = B$

$B = C$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = e^{2 \times \frac{x}{2}} = e^x$.

$e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$

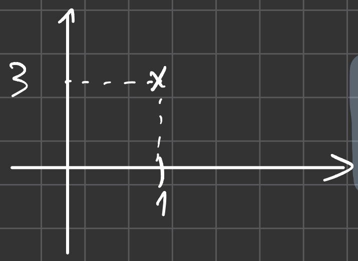
2. Par transitivité de l'égalité $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$. car un carré est toujours positif.

3. Or $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x \neq 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^x > 0}$.

Plus De Bonnes Notes

Soit $x \in \mathbb{R}$, On pose $f(x) = e^{x}$.

$$f'(x) = e^{x} > 0.$$



Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.