



# La fonction exponentielle :

$$\exp(x) = e^x$$

$$e^0 = 1$$

$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(e^a)^b = e^{a \times b}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

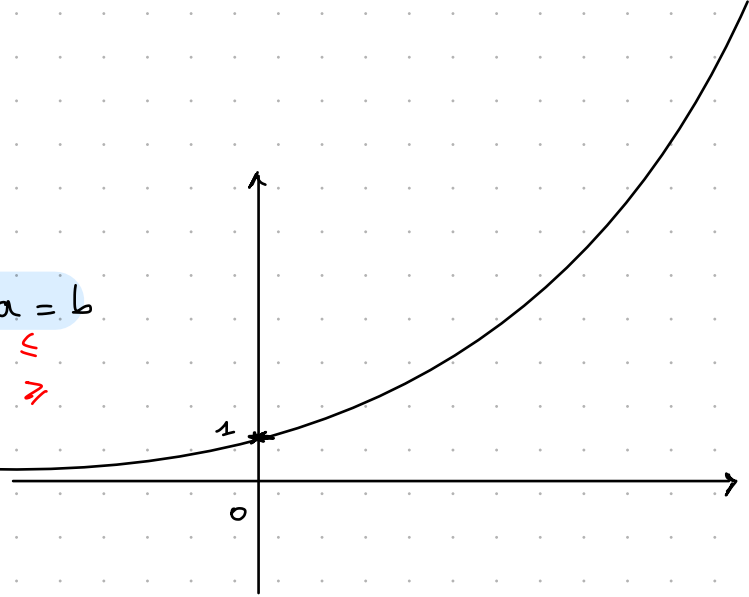
$$\frac{1}{e^a} = e^{-a}$$

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^u)' = u' e^u$$



$$\text{si } a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2$$

$$\text{si } b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow \triangle$$

$$b^2 \neq a^2 + c^2 \Rightarrow \triangle$$

reciproque

contraposé

Montrons que  $\sqrt{2}$  est un irrationnel.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il soit rationnel et cherchons une contradiction.

Supposons qu'il existe  $a$  et  $b \in \mathbb{N}$  telles que  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$   $b \neq 0$

$\frac{a}{b}$  irréductible

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$a^2 = 2b^2$$

donc  $a^2$  est pair

donc  $a$  est pair

$$\exists p \text{ tq } a = 2p$$

$$(2p)^2 = 2b^2$$

$$4p^2 = 2b^2 \text{ donc } b^2 \text{ pair}$$

$$2p^2 = b^2 \text{ donc } b \text{ pair}$$

Contradiction avec le fait que  $\frac{a}{b}$  est irréductible

par contraposé

$A \Rightarrow B$   
reciproque  $B \Rightarrow A$

contraposé non B  $\Rightarrow$  non A

$$a \text{ pair} \Leftrightarrow a^2 \text{ pair}$$

$$\Rightarrow a = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 = (2k)^2$$

$$a^2 = 4k^2 \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 = 2 \times (2k^2)$$

donc  $a^2$  pair

$$\Leftarrow a = 2k+1 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1 \in \mathbb{Z}$$



# La fonction exponentielle

## I. Découverte de la fonction exponentielle

### 1. Définition

**Théorème n°1 (admis)** : Il existe une fonction  $f$  vérifiant :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$  ;
- $f(0) = 1$ .

**Théorème n°2 (dém en TD exo n°1)** : Soit une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$  ;
- $f(0) = 1$ .

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$$

Autrement dit, la fonction  $f$  définie par les deux points précédents, si elle existe, ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème n°2 (dém en TD exo n°2)** : Soit une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$  ;
- $f(0) = 1$ .

Alors :

*elle est unique*

**Définition n°1** : La fonction  $f$  dont on vient de parler dans la question précédente s'appelle la fonction exponentielle. On la note  $\exp$ , elle est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$\begin{cases} \exp(0) = 1 \\ \exp'(x) = \exp(x) \end{cases}$$

## II. Propriétés de la fonction exponentielle

**Théorème n°3 (dém en TD exo n°3)** : Soient deux nombres réels  $x$  et  $y$ . Alors, la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle s'écrit :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

**Propriété n°1 (dém en TD exo n°4)** : Quel que soit le nombre  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

**Propriété n°2 (dém en TD exo n°5)** : Quels que soient les nombres  $x$  et  $y$  que l'on choisit dans l'ensemble des nombres réels, on a :

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

**Propriété n°3 (dém admise en 1<sup>ère</sup>)** : Pour tout réel  $x$  et pour tout entier relatif  $n$ , on a :

$$(e^a)^n = e^{a \times n}$$

$$(\exp(x))^n = \exp(n \times x)$$

### 2. Notation simplifiée

**Définition n°2** : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée :

$$\exp(1) = e^1 = e$$

$$\exp(1) = e$$

On précise que  $e$  est un nombre irrationnel et on donne une valeur approchée de  $e$  à  $10^{-6}$  près.

$$e \approx 2,718\ 282$$

Nous remarquons que toutes les propriétés et théorèmes précédemment énoncés satisfont les propriétés sur les puissances :

- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y) \Leftrightarrow e^{x+y} = e^x \times e^y$  ;



- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x}$  ;
- $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \Leftrightarrow e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$  ;
- $(\exp(x))^n = \exp(nx) \Leftrightarrow (e^x)^n = e^{nx}$  ;
- $\exp(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 = 1$ .

Ainsi, dans un souci de simplification de la notation de la fonction exponentielle, on notera désormais :

$$\exp(x) = e^x$$

### III. Étude de la fonction exponentielle

#### 1. Le signe de la fonction exponentielle

**Propriété n°4 (dém en TD exo n°6) :** On a :

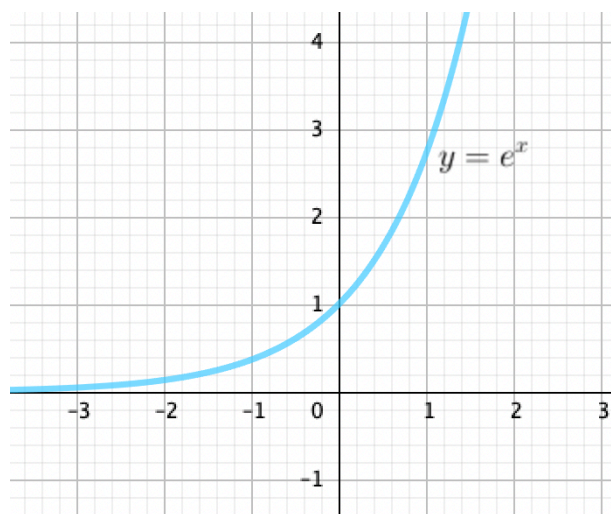
$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

En d'autres termes la fonction exponentielle est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

#### 2. Variations de la fonction exponentielle

**Propriété n°5 (dém en TD exo n°7) :** La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Par ailleurs, voici la courbe représentative de la fonction exponentielle :



En voici le tableau de variation :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

**Propriété n°6 (dém en TD exo n°7) :** Soit  $u$  une fonction définie sur  $I \subseteq \mathbb{R}$ . On pose la fonction définie par :

$$f(x) = e^{u(x)}$$

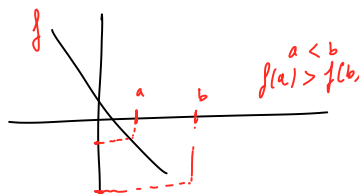
Alors, on a :

$$\forall x \in I, f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

#### 3. Équations et inéquations

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \\ e^a < e^b \Leftrightarrow a < b \\ e^a > e^b \Leftrightarrow a > b \end{cases}$$





## IV. Exercices

### Exercice n°1

Soit une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :

- $f'(x) = f(x)$  ;
- $f(0) = 1$ .

On a la propriété suivante :  $u'(-x) = -u'(x)$ . On précise que  $u$  est une fonction définie et dérivable sur  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

1. On pose  $\phi$ , une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\phi(x) = f(x) \times f(-x)$$

2. Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = 0$ .
3. En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = 1$ . On pourra utiliser le fait que  $f(0) = 1$ .
4. On suppose maintenant qu'il existe un réel  $x_0$  tel que  $f(x_0) = 0$ . Calculer alors la valeur numérique de  $\phi(x_0)$ .
5. On a déjà établi que  $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = 1$ . Alors, le résultat de la question 4 vous semble-t-il pertinent ?
6. Conclure.

### Exercice n°2

**Méthode générale** pour démontrer l'**unicité** d'une fonction  $u$  définie et dérivable sur  $I \subseteq \mathbb{R}$  et caractérisée par deux propriétés  $P_1$  et  $P_2$  :

- Par l'**absurde**, on suppose qu'il existe une autre fonction  $v$  (différente de  $u$ ) caractérisée exactement de la même manière que  $u$ . C'est-à-dire qu'on suppose que  $u$  est définie et dérivable sur  $I \subseteq \mathbb{R}$  et que  $u$  vérifie les propriétés  $P_1$  et  $P_2$ .
- On effectue un raisonnement sur  $u$  et  $v$  basé sur les définitions, propriétés, connaissances vraies dont la conclusion est que  $u = v$ .
- Or dire que  $u = v$  est contradictoire puisque nous avons supposé que  $u \neq v$ .

- On conclut donc que ce que nous avons supposé ( $u = v$ ) est faux. C'est donc le contraire qui est vrai. Ainsi, il ne peut pas exister une autre fonction  $v$  caractérisée exactement de la même manière que  $u$

Supposons qu'il existe une autre fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :

- $f'(x) = f(x)$  ;
- $f(0) = 1$ .

On suppose par ailleurs l'existence d'une autre fonction  $g \neq f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que :

- $g'(x) = g(x)$  ;
- $g(0) = 1$ .

1. On pose  $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ . Déterminez l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de  $h$ .
2. Démontrerez que  $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0$ .
3. En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x)$ .
4. Conclure.

### Exercice n°3

Soit  $b \in \mathbb{R}$ . On considère la fonction  $h$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \frac{\exp(x + b)}{\exp(b)}$$

1. Démontrer que  $h(0) = 1$ .
2. Démontrer que  $h'(x) = h(x)$ .
3. Connaissant l'unicité de la fonction  $\exp$ , quelle est la relation mathématique entre  $h(x)$  et  $\exp(x)$  ?
4. Nous savons que la fonction  $h$  est définie pour tout nombre réel  $x$ . En particulier, lorsque  $x$  prend une valeur  $a$ , donner l'expression de  $h(a)$ .
5. En déduire la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle.



### Exercice n°4

Soit  $x$  un nombre réel. On considère la fonction exponentielle définie par  $\exp'(x) = \exp(x)$  et par  $\exp(0) = 1$ .

La fonction  $\phi$  définie dans l'exercice n°1 est telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = 1$$

En utilisant la relation précédente démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

### Exercice n°5

Nous avons déjà démontré la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels ( $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ )

1. Écrire  $x - y$  sous la forme d'une somme.
2. En utilisant la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle, déduire que  $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ .

### Exercice n°6

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Réduisez de deux manières différentes l'expression  $e^{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}}$ .
2. En déduire que pour nombre réel  $x$ ,  $e^x \geq 0$ .
3. Enfin, démontrer que pour tout nombre réel  $x$ ,  $e^x > 0$ .

### Exercice n°7

Définissons une fonction  $a$  sur un intervalle  $I$  et une autre fonction  $b$  sur un intervalle  $J$  telle que  $b(x) \in I$ . On a alors la fonction schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} J & \rightarrow & I \\ x & \xrightarrow{b} & b(x) \\ & & b(x) \xrightarrow{a} a(b(x)) \end{array}$$

Cette opération s'appelle la composition des fonctions  $a$  et  $b$  et on peut également noter :

$$a(b(x)) = a \circ b(x)$$

Dans ces conditions, on a la propriété suivante, pour tout réel  $x \in J$  :

$$f(x) = a(b(x)) \Rightarrow f'(x) = b'(x) \times a'(b(x))$$

En utilisant la propriété précédente, démontrer que :

$$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

### Exercice n°8

Simplifiez les expressions suivantes :

1.  $\frac{e^3 \times e^2}{e^6}$
2.  $\frac{e^3 \times e^4}{e^{-5}}$
3.  $\frac{1}{e^{-1}}$
4.  $(e^{3x+2})^2$
5.  $\frac{e^{5x+7} \times e^{-x-3}}{e^{2x+3}}$
6.  $\frac{e^{-5}}{e^2}$

### Exercice n°9

Calculer l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes définies sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $f(x) = e^{2x+3}$
2.  $f(x) = 7e^{\frac{1}{2}x+2}$
3.  $f(x) = \left(\frac{3}{4}x + 1\right) \times e^x$
4.  $f(x) = e^{x^2}$
5.  $f(x) = 3x^2 \times e^{-2x+3}$
6.  $f(x) = \frac{7}{e^{x^2+3}}$

### Exercice n°10

Étudier les variations des fonctions suivantes sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $f(x) = e^{3x}$
2.  $f(x) = e^{-2x+3}$
3.  $f(x) = (2x + 3) \times e^{3x+1}$
4.  $f(x) = \frac{2x+3}{e^{-2x+3}}$
5.  $f(x) = (-2x^2 + 5x - 4) \times e^{\frac{1}{2}x}$
6.  $f(x) = \frac{-2x+3}{e^{5x}}$



### Exercice n°11

Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $e^x = 1$
2.  $e^{x+3} = e^2$
3.  $e^x + e^{-x} = 1$
4.  $e^{-x+4} = (e^{-x})^4$
5.  $e^{x^2-4} = (e^{x+2})^2$
6.  $\frac{4e^x-1}{1-e^x} = -1$

### Exercice n°12

Résoudre les inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $e^{\frac{x}{2}} < e$
2.  $e^{-x+4} > e^x$
3.  $e^{x^2} \leq (e^x)^2$
4.  $e^{2x} + 3e^x - 4 \geq 0$
5.  $\frac{2e^x}{e^{x+3}} < \frac{1}{2}$
6.  $e^x + e^{-x} \geq 2$

### Exercice n°13

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(x) = -3e^x$ .

1. Vérifier que  $f' = f$ .
2. Calculer  $f(0)$ .

### Exercice n°14

On considère la fonction  $f$  définie pour réel  $t$  par  $f(t) = 2e^{-6t}$ .

1. Vérifier que  $f'(t) + 6f(t) = 0$ .

### Exercice n°15

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ .

1. Étudiez les variations de la fonction  $g$ .
2. Déterminez le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
3. En déduire que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $e^x - x > 0$ .

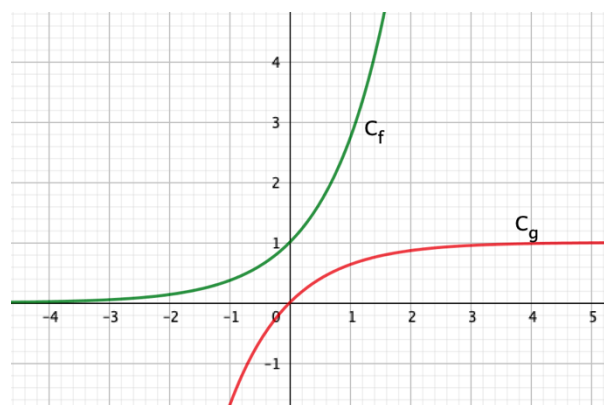
### Exercice n°16

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies pour tout réel  $x$  par :  $f(x) = e^x$  et  $g(x) = 1 - e^x$ . Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement  $C_f$  et  $C_g$  sont fournies en aval.

1. Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracez au mieux ces tangentes sur la figure fournie.

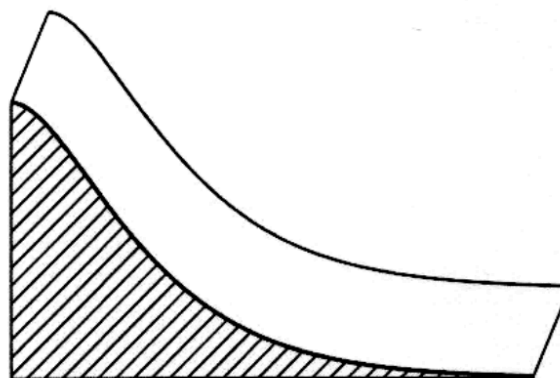
On admet l'existence de ces tangentes communes. On note  $\mathcal{D}$  l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe  $C_f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$  et tangente à la courbe  $C_g$  au point  $B$  d'abscisse  $b$ .

2. Exprimer en fonction de  $a$  le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $A$ .
3. Exprimez en fonction de  $b$  le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $C_g$  au point  $B$ .
4. En déduire que  $b = -a$ .



### Exercice n°17

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan :

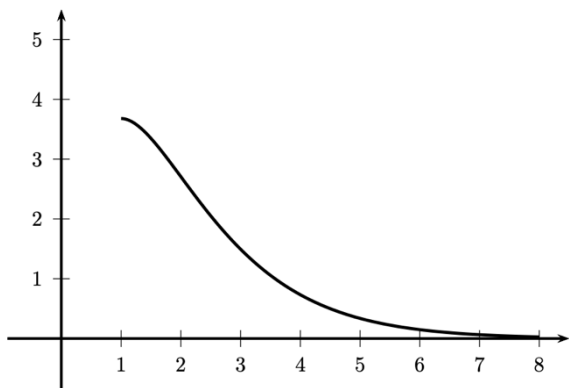




Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe  $\mathcal{C}$  représentant la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; 8]$  par :

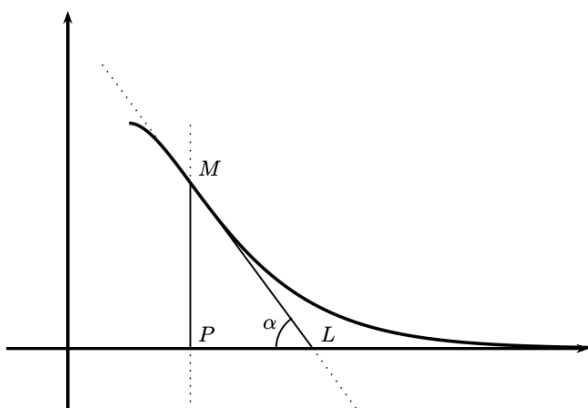
$$f(x) = (ax + b)e^{-x}$$

Où  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels. La courbe  $\mathcal{C}$  est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en son point d'abscisse 1 soit horizontale. Déterminez alors la valeur de l'entier  $b$ .
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminez alors la valeur de  $a$ .

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan. On considère le point  $M$  de la courbe  $\mathcal{C}$ , d'abscisse différente de 1. On appelle  $\alpha$  l'angle aigu formé par la tangente en  $M$  à  $\mathcal{C}$  et l'axe des abscisses. La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle  $\alpha$  soit inférieur à  $55^\circ$ .

3. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1; 8]$ . On admet que, pour tout  $x$  de cet intervalle,  $f'(x) = 10(1 - x)e^{-x}$ . Étudier les variations de la fonction  $f'$  sur l'intervalle  $[1; 8]$ .
4. Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $[1; 8]$ , et soit  $M$  le point d'abscisse  $x$  de la courbe  $\mathcal{C}$ . Justifiez que  $\tan(\alpha) = |f'(x)|$ .
5. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées.

### Exercice n°18

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la représentation graphique de la fonction  $f$  et  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x - 3$  dans un repère orthogonal du plan.

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - (x - 3)$ .

1. Justifiez que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .
2. La courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\mathcal{D}$  ont-elles un point en commun ?

On note  $M$  le point d'abscisse  $x$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$ ,  $N$  le point d'abscisse  $x$  de la droite  $\mathcal{D}$  et on s'intéresse à l'évolution de la distance  $MN$ .

3. Justifiez que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ , la distance  $MN$  est égale à  $g(x)$ .
4. On note  $g'$  la fonction dérivée de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ . Pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ , calculer  $g'(x)$ .
5. Montrer que la fonction  $g$  possède un maximum sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  que l'on déterminera. En donner une interprétation graphique.