



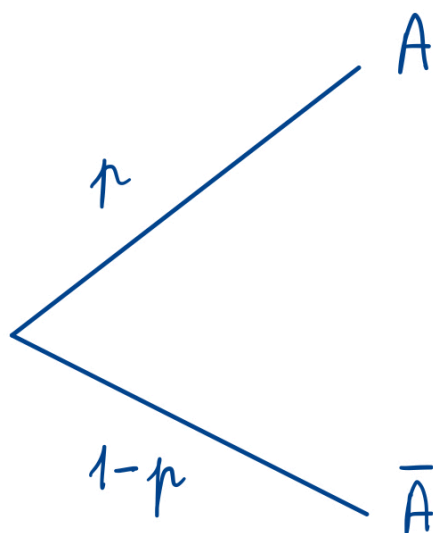
Loi de Bernoulli – Loi Binomiale

I. Le schéma de Bernoulli

1. Définition

Définition : On considère une expérience aléatoire que l'on note E . On dit que E est une expérience (épreuve, schéma) de Bernoulli si et seulement elle n'a que deux issues : A et \bar{A} .

Exemple : Obtenir pile ou face au lancé de dé ; gagner un match ou ne pas le gagner ; toucher une cible au tir à l'arc ou ne pas la toucher sont des schémas de Bernoulli puisqu'à chaque fois, il n'y a que deux issues.



Remarque : Il arrive parfois que A soit considéré comme le succès et que \bar{A} soit considéré comme l'échec.

2. Variable aléatoire

A chaque issue de l'épreuve de Bernoulli, on associe, à l'aide d'une variable aléatoire X , une unique valeur :

- Si on obtient A , alors X prend la valeur $X = 1$;
- Si non, si on obtient \bar{A} , on a $X = 0$

3. Loi de probabilité

Rappel : une loi de probabilité est un tableau qui associe à chaque valeur de la variable aléatoire une unique probabilité.

Voici la loi de probabilité pour la loi de Bernoulli :

$X = k, k \in \mathbb{N}$	$X = 0$	$X = 1$
$P(X = k)$	$1 - p$	p

Alors, on peut calculer l'espérance de X :

$$E(X) = \sum_{i=0}^n p_i \times X_i$$

$$E(X) = (1 - p) \times 0 + p \times 1 = p$$

Nous venons de voir le fonctionnement du schéma de Bernoulli, voyons maintenant comment la loi binomiale est construite à partir de l'épreuve de Bernoulli.

II. La loi Binomiale.

1. Définition

Définition : On considère une épreuve de Bernoulli ayant pour issues A et \bar{A} . On répète cette épreuve de Bernoulli n fois de manière **indépendante**. On construit alors la variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de fois qu'on obtient A . Dans ces conditions, on dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(n; p)$. Et on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Exemple : On considère une pièce de monnaie non pipée. On lance la pièce 5 fois de manière indépendante. On pose X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de « piles » :

$$P(X = 1) \approx 0,16$$

Ainsi la probabilité d'obtenir exactement 1 pile dans les 5 lancers est de 0,16.



▪ $P(X \leq 4) = 0,97$

On est donc sûr à 97% d'obtenir moins de 4 piles lorsqu'on lance la pièce 5 fois.

$X = k$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$
$P(X = k)$	0,03	0,16	0,31	0,31	0,16	0,03

Exercice d'application : Un archer tire 10 fois de suite sur une cible de manière indépendante. A chaque tir, la probabilité de toucher la cible est 0,9 . On considère la variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de fois qu'il touche la cible.

1. Calculer la probabilité qu'il touche exactement 3 fois la cible.

$$P(X = 3) = 0,000008748$$

2. Calculer la probabilité qu'il touche la cible au moins une fois.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,999999 \dots$$

3. Calculer la probabilité qu'il touche la cible 10 fois.

$$P(X = 10) = 0,35$$