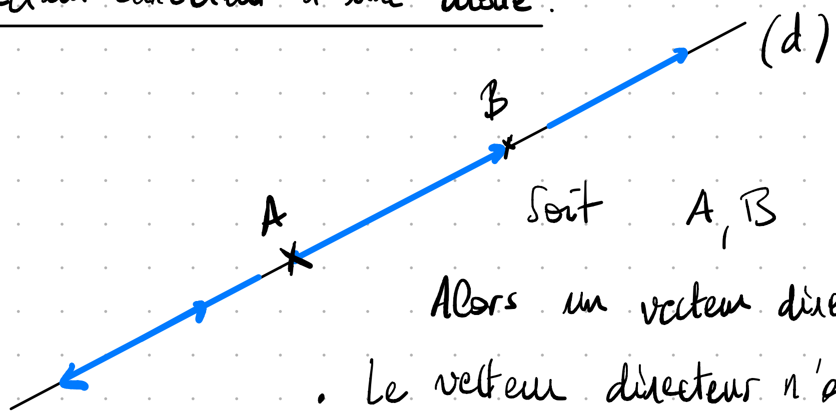
Equation de droite et système :

Vecteur directeur d'une droite.



Soit A, B deux points de (d)

Alors un vecteur directeur de (d) est $\vec{AB}$

• Le vecteur directeur n'est pas unique.

Application :

$d : ax + by + c = 0$ $\qquad \vec{u}(-b ; a)$

$d : x + 2y + c = 0$ $\qquad \vec{u}(-2 ; 1)$

$d : 2 + 2 \times 3 + c = 0$ $\qquad A(2 ; 3)$

$8 + c = 0$

$\boxed{c = -8}$

donc $d : x + 2y - 8 = 0$.

$\downarrow$

$B(0 ; 4)$

$x + 2y - 8 = 0$

$2y - 8 = 0$

$2y = 8$

$\boxed{y = 4}$

$d : 2x + 2y + 2 = 0$

$d' : x + y + 1 = 0$

même droite
il suffit de diviser la ligne par 2.

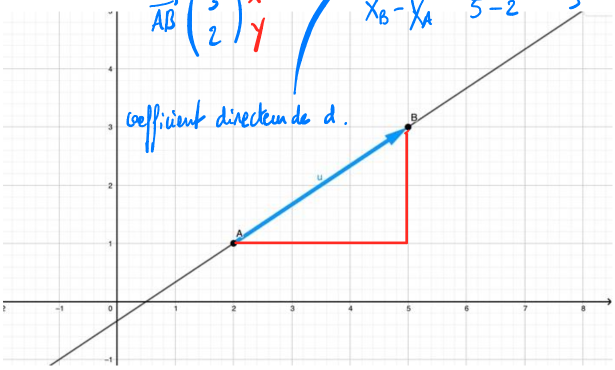
Équations de droite et systèmes d'équations

I. Équations de droite.

1. Vecteur directeur d'une droite.

Définition
Soit une droite d définie par deux points A et B. Un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$ $\quad \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{3-1}{5-2} = \dfrac{2}{3}$



Remarque
Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas unique, car 2 points quelconques de la droite définissent un vecteur directeur. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite d, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. On a donc $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\vec{v}'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ $\det(\vec{u};\vec{v}) = xy' - x'y$

Application
Soit la droite (AB) définie par les points : $A(3;4)$ et $B(2;3)$. Déterminez un vecteur directeur de la droite (AB).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-3\\3-4\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

Théorème
Une droite est entièrement définie si l'on connaît un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$

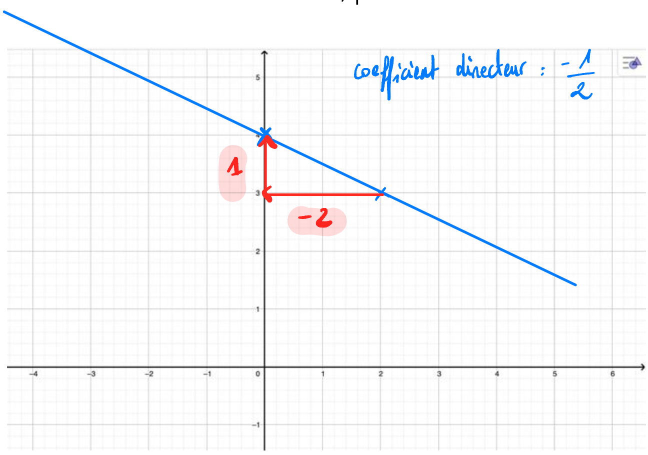
2. Équation cartésienne d'une droite.

Théorème
Soit une droite d du plan déterminé par un point $A(x_A;y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$ avec a et b non tous les deux nuls. Une équation cartésienne de la droite d est du type :

$$\boxed{d: ax + by + c = 0}$$

Démonstration
(Voir exercice 10)

Application
Soit la droite d définie par les points $A(2;3)$ et $\vec{u}(-2;1)$. Déterminez une équation cartésienne de la droite d, puis tracer la droite.



Remarque
L'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients par un facteur k non nul. Par exemple, on peut trouver pour la droite de l'application précédente :

$$-2x - 4y + 16 = 0$$

En multipliant par -2.

3. Équation réduite d'une droite.

Définition
Soit une droite définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$, avec $b \neq 0$ (droite non verticale). On peut alors mettre en équation cartésienne de la droite d sous la forme :

$$\boxed{d: y = mx + p}$$

Où m représente le coefficient directeur de la droite d et p l'ordonnée à l'origine. Cette équation est appelée équation réduite de la droite d. Un vecteur directeur est alors $\vec{v}(1;m)$.

Démonstration
Traité en exercice.

Remarque
Lorsque l'on peut trouver l'équation réduite de la droite d, celle-ci est alors la représentation d'une fonction ~~linéaire~~. affine.

Théorème
Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points d'une droite d tels que $x_B - x_A \neq 0$, on peut alors trouver les coefficients de l'équation réduite d. On a alors :

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

$$\boxed{p = y_A - m x_A}$$

Application
Soit la droite (AB) définie par : $A(-1;4)$ et $B(2;6)$. Déterminer une équation réduite de la droite (AB).

$m = \frac{6-4}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$

$y = mx + p$

$y = \frac{2}{3}x + p$

$4 = \frac{2}{3} \times (-1) + p$

$\frac{4 \times 3}{3} + \frac{2}{3} = p = \frac{14}{3}$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$

4. Droites particulières.

Définition
Droites parallèles aux axes :

- Une droite horizontale a comme équation $y = a$;
- Une droite verticale a comme équation $x = b$;

5. Parallélisme de deux droites

Théorème
Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ou de coefficients directeurs m et m' sont parallèles si, et seulement si :

- Leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Leurs coefficients directeurs sont égaux.

II. Système d'équations linéaires

1. Définition

Définition
On appelle système d'équations linéaires (S) de deux équations à deux inconnues, le système défini par :

$$\boxed{(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}}$$

2. Existence de solution.

Chaque équation d'un système linéaire à deux inconnue (S) est assimilable à une équation cartésienne d'une droite. On peut donc assimiler le système linéaire de deux équations à l'intersection de deux droites.

Théorème
L'existence de solution d'un système linéaire (S) de deux équations à deux inconnues dépend de l'intersection des deux droites (D_1) et (D_2) vérifiant chacune l'une des équations du système. Trois cas peuvent alors se produire :

- Les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes. Il existe alors une unique solution au système : les coordonnées du point d'intersection des deux droites en question.
- Les droites (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles. Il n'existe aucune solution au système.
- Les droites (D_1) et (D_2) sont confondues. Il existe alors une droite solution au système.

Les droites composant le système sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. On crée alors un déterminant, noté δ défini par :

$$\delta = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Les droites sont sécantes si et seulement si le déterminant du système $\delta \neq 0$.

Les droites sont parallèles si et seulement si le déterminant du système $\delta = 0$.

- Les droites sont strictement parallèles si $\frac{c}{a} \neq \frac{c'}{a'}$;
- Les droites sont confondues si $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$.

3. Méthode de résolution par addition

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 3x - 7y = 1 \; (\times (-5)) \\ 5x + 2y = 29 \; (\times 3) \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} -15x + 35y = -5 \\ 15x + 6y = 87 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les deux équations on trouve :

$$0x + 41y = 82$$
$$y = \frac{82}{41} = 2$$

On remplace $y = 2$ dans une équation :

$$3x - 7 \times 2 = 1$$
$$3x = 1 + 14$$
$$x = \frac{15}{3} = 5$$

4. Résolution par substitution

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ 5x + 2y = 29 \end{cases}$$

On isole par exemple x dans la première équation :

$$x = \frac{1 + 7x}{3}$$

On remplace x par cette expression dans la seconde équation :

$$\frac{5(1 + 7y)}{3} + 2y = 29$$
$$5(1 + 7y) + 6y = 87$$
$$5 + 35y + 6y = 87$$
$$35y + 6y = 82$$
$$41y = 82$$
$$y = \frac{82}{41} = 2$$

On remplace $y = 2$ dans l'expression de x :

$$x = \frac{1 + 7 \times 2}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

La solution est un unique couple :

$$S = \{(5; 2)\}$$

III. Exercices :

Exercice 1 :

Soit le système suivant :

$$\boxed{\begin{cases}5x - 3y = 26\\3x + 4y = 33\end{cases}}$$

1. Sans résoudre ce système, montrer que ce système admet une solution.
2. Résoudre le système.

Exercice 2 :

Par la méthode de votre choix, résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases}x - 4y = -2\\x + y = 3\end{cases}$
2. $\begin{cases}x - y = 4\\2x + 3y = 3\end{cases}$
3. $\begin{cases}4x + 9y = 5\\6x - 6y = 1\end{cases}$
4. $\begin{cases}2x + 3y = 1\\5x - 2y = 12\end{cases}$
5. $\begin{cases}2x - 6y = 5\\3x - 9y = 1\end{cases}$
6. $\begin{cases}\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1\\\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 2\end{cases}$

Exercice 3 :

Problèmes amenant à résoudre un système d'équation :

1. J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez mon âge, nos deux âges réunis feront 63 ans. Quels sont nos âges ?
2. Si un automobiliste roule à 80 km/h, il arrive à 12 heures. S'il roule à 60 km/h, il arrive à 13 heures. Quelle distance parcourt-il ?

Exercice 4 :

Déterminer dans chacun des cas si les droites d et d' sont parallèles ou sécantes :

1. $d: 2x + 3y - 5 = 0 \;\; et \;\; d': 4x + 6y + 3 = 0$
2. $d: -5x + 4y + 1 = 0 \;\; et \;\; d': 6x - y - 2 = 0$
3. $d: 7x - 8y - 3 = 0 \;\; et \;\; d': 6x + 9y = 0$
4. $d: 9x - 3y + 4 = 0 \;\; et \;\; d': -3x + y + 4 = 0$
5. $d: 2x + 2y - 2 = 0 \;\; et \;\; d': 4x + 4y - 4 = 0$

Exercice 5 :

On considère les points $A(0;3)$, $B(2;2)$ & $C(1{,}5;-1)$

1. Tracer un repère puis placer les points
2. Donner l'équation réduite et la représentation paramétrique de la droite passant par A et C. Puis la tracer.
3. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction qui pout tout point du plan donne l'homothétie de rapport 1 et de centre l'origine du repère.
   a. Soit $M(x;y)$ un point du plan donner l'expression algébrique de $h(M)$.
   b. Placer $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$
   c. Tracer les droites : $(BC'), (BB'), (CC'), (AB')$ et (AC)
   d. Pour chacune des droites tracées donner l'équation réduite et une équation cartésienne de la droite.

Exercice 6 :

On donne les points $A(6;-1)$, $B(2\,;7)$, $C(-4\,;-3)$.

1. Donner une équation réduite des médianes issues de A et de C du triangle ABC.
2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité du repère.

Exercice 7 :

On donne les points $A(2;-1), B(1;2)$ et $C(-3;0)$.

1. Démontrer que les points A, B et C forment un triangle.
2. Calculer les coordonnées I du milieu de BC.

3. Déterminer l'équation réduite de la droite d passant par B et parallèle à la médiane issue de A

4. Vérifier graphiquement les réponses

Exercice 9 :

Soit d la droite d'équation, $d : 3x + 2y - 7 = 0$:

1. Vérifier que le point A(1 ;2) appartient à la droite d.

2. Trouver l'abscisse du point B de d d'ordonnée égale à 4.

Exercice 10 :

Démonstration de l'existence de l'équation cartésienne de droite :

1. Soit $A(x_a\,; y_a)$ un point de la droite d et $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$

   A quelle condition un point $M(x; y)$ appartient-t-il à la droite d ?

2. En déduire une équation en fonction de $x\,, y\; x_0, y_0, \alpha \; et\; \beta$.

3. En factorisant les termes en x et en y en déduire que l'équation est bien sous la forme $ax + by + c = 0$.

4. Identifier alors a, b et c.

5. Cette équation est l'équation cartésienne de la droite d. Est-elle unique ?

6. Démontrer que l'équation réduite est unique.

Exercice 11 :

Dans un repère, d est la droite d'équation :

$$y = 3x + 7$$

a. Vérifier que les points $A\left(-\frac{2}{3}; 5\right)$ et $B\,(0;\,7)$ appartiennent à la droite d.

b. Les points A, B et $C\,(-1;\,4)$ sont-ils alignés ?

Dans un repère, d est la droite d'équation :

$$y = \frac{5}{2}x - 1.$$

a. A est le point de d d'abscisse 6 ; quelle est son ordonnée ?

b. B est le point de d d'abscisse 12 ; quelle est son ordonnée ?

c. C est le point de d d'ordonnée 4 ; quelle est son abscisse ?

d. D est le point de d d'ordonnée − 1 2 ; quelle est son abscisse ?

Dans un repère d'origine O, on considère les points : $A(1;\,5), B(-2;\,4), C(1;\,4), D(-3;\,5)$.

Déterminer l'équation des droites suivantes :

a. (AB)

b. (BC)

c. (AC)

d. (OD)

Déterminer l'équation de la droite (MN) par la méthode de votre choix dans les cas suivants :

a. $M(-5;\,2), N(7;\,20)$

b. $M(4,9;\,-2), N(0,7;\,-2)$

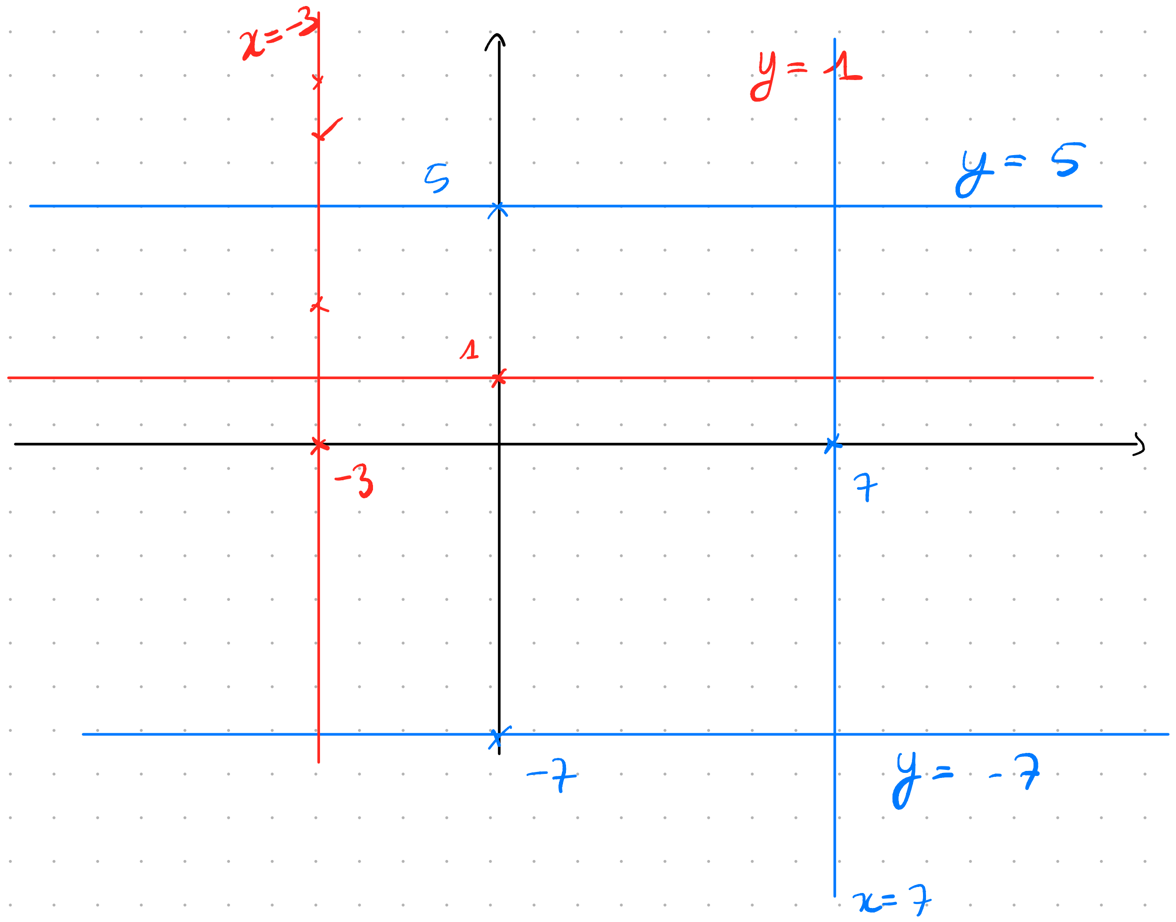
c. $M\left(\frac{3}{4}\,;\,25\right), N(0,75;\,-100)$

d. $M\left(-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right), N(4;\,-3)$

Exercice 12 :

Montrer que deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficient directeur vaut -1.

Plus de bonnes notes



<u>Exercice 1</u> :

$$\begin{cases} 5x - 3y = 26 \\ 3x + 4y = 33 \end{cases}$$

1. $5 \times 4 - 3 \times (-3) = 20 + 9 = 29 \neq 0$.

Le système admet une solution car le déterminant est non-nul. (les droites ne sont pas colinéaires donc il existe un point d'intersection).

Résoudre le système, c'est trouver le point d'intersection des deux droites.

2. $\begin{cases} 5x - 3y = 26 \\ 3x + 4y = 33 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 26 + 3y \\ 3x + 4y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{5} + \frac{3}{5}y \\ 3\left(\frac{26}{5} + \frac{3}{5}y\right) + 4y = 33 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{5} + \frac{3}{5}y \\ \frac{78}{5} + \frac{9}{5}y + 4y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{5} + \frac{3}{5}y \\ 78 + 9y + 20y = 165 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{5} + \frac{3}{5}y \\ 29y = 165 - 78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{5} + \frac{3}{5}y \\ 29y = 87 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{5} + \frac{3}{5}y \\ y = \frac{87}{29} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{5} + \frac{9}{5} = \frac{35}{5} = 7 \\ y = 3 \end{cases}$

Le point d'intersection des deux droites est le point $(7 ; 3)$