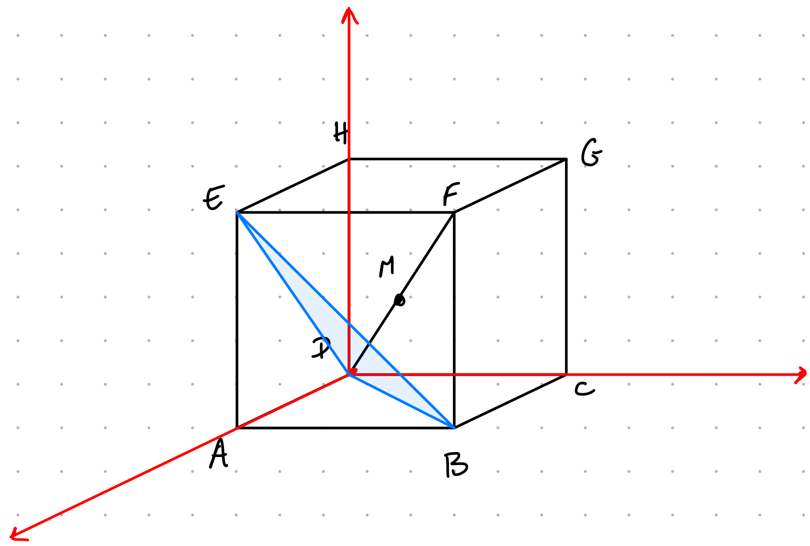
Plus de bonnes notes

Bac S Liban Juin 2017

Exercice 1 :



1. Montrons que $\vec{DF}$ est normal au plan (EBG)

- Dans le repère $(D ; \vec{DA} ; \vec{DC} ; \vec{DH})$ on a :

$D(0;0;0)$; $F(1;1;1)$; $E(1;0;1)$; $B(1;1;0)$; $G(0;1;1)$

$\vec{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{EB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{EG}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

On peut donc calculer $\longrightarrow$ $\vec{DF}\cdot\vec{EB} = 1\times0 + 1\times1 + 1\times(-1)$
$= 0 + 1 - 1 = 0$

$\longrightarrow$ $\vec{DF}\cdot\vec{EG} = 1\times(-1) + 1\times1 + 1\times0$
$= -1 + 1 + 0$
$= 0$

$\vec{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non-colinéaires du plan donc $\vec{DF}$ est normal au plan (EBG)

2. Déterminons une équation cartésienne du plan (EBG)

On a $\vec{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc (EBG) : $x+y+z+d=0$.

or $E \in (EBG)$ et $E(1;0;1)$

donc (EBG) : $1+0+1+d=0 \Rightarrow d=-2$

Plus de bonnes notes

Donc $(EBG) : x+y+z-2=0$.

3. Cherchons I le point d'intersection de (DF) et (EBG)

vecteur directeur

point de la droite

Une représentation paramétrique de (DF) est : $\begin{cases} x = 1t + 0 \\ y = 1t + 0 \\ z = 1t + 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Les coordonnées de I doivent vérifier :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ x+y+z-2=0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

donc il en résulte

$3t - 2 = 0 \iff t = \frac{2}{3}$

Donc $I\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$

Partie B :

1. On cherche θ si M est confondu avec D.

$$\theta = \widehat{EMB} = \widehat{EDB} = \frac{\pi}{3}$$

car $\widehat{EDB}$ est équilatéral donc les 3 angles du triangles sont identique.

On cherche θ si M est confondu avec F.

$\theta = \widehat{EMB} = \widehat{EFB} = \frac{\pi}{2}$ car EFB est rectangle en F.

2. a. Justifions que les coordonnées de M sont $(x ; x ; x)$

$\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF} = x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}$ or $D(0;0;0)$

donc $M(x ; x ; x)$

Plus de bonnes notes

b. Montrons que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$

On sait que $\vec{ME} \cdot \vec{MB} = \|\vec{ME}\| \times \|\vec{MB}\| \times \cos(\theta)$

$\vec{ME}\begin{pmatrix} 1-x \\ -x \\ 1-x \end{pmatrix}$ $\vec{MB}\begin{pmatrix} 1-x \\ 1-x \\ -x \end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec{ME} \cdot \vec{MB} = (1-x)^2 - x(1-x) - x(1-x)$

$= 1 - 2x + x^2 - x + x^2 - x + x^2$

$= 3x^2 - 4x + 1$

$3x^2-4x+1 = \sqrt{(1-x)^2+(-x)^2+(1-x)^2} \times \sqrt{(1-x)^2+(1-x)^2+(-x)^2} \times \cos\theta.$

$\sqrt{a}\times\sqrt{a} = a$

$3x^2-4x+1 = \left((1-x)^2+(-x)^2+(1-x)^2\right)\cos\theta$

$3x^2-4x+1 = (1-2x+x^2+x^2+1-2x+x^2)\cos\theta$

$3x^2-4x+1 = (3x^2-4x+2)\cos\theta$

$\Longrightarrow \cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}.$

3. Le triangle MEB est rectangle en M si :

$\cos(\theta) = \cos(\widehat{EMB}) = 0.$

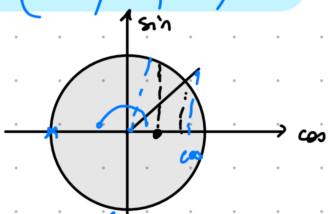
on lit sur le tableau de variation que $\cos\theta = 0$ pour

$x = \dfrac{1}{3}$ et $x = 1$

⚠ $M(x\,;x\,;x)$

Donc c'est lorsque M est sur $J\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

ou M est sur $F(1\,;1\,;1)$



cos est decroissant sur $[0;\pi]$

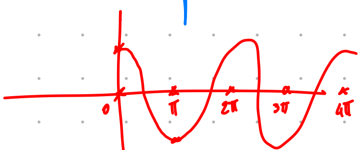
$\cos 0 = 1$

$\cos\pi = -1$

et cos est monotone sur $[0;\pi]$

b. l'angle est maximal lorsque,

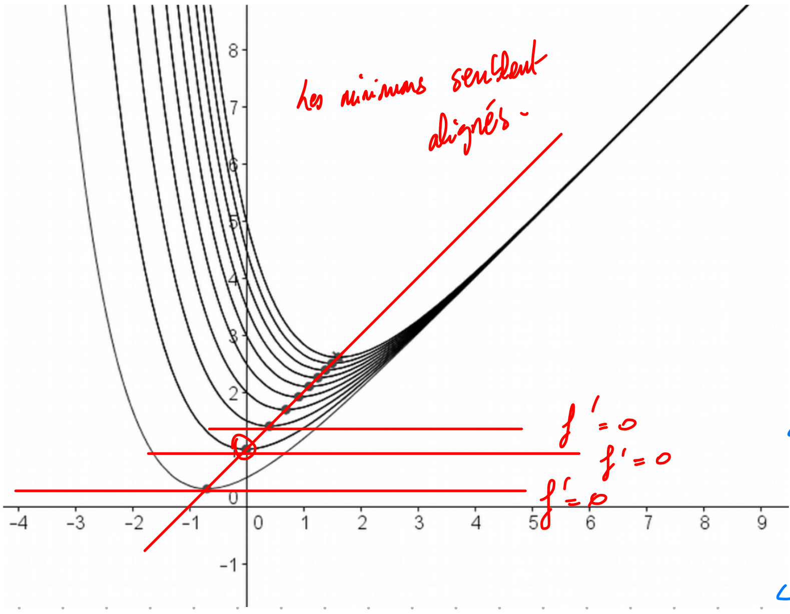
cos(θ) est minimal donc on lit que le minimum est atteint pour $x = \dfrac{2}{3}$ donc $M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$



donc lorsque M est confondu avec I.

Exercice 3 :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}$$



$f_k'(x) = 1 - ke^{-x}$

le minimum correspond à $f_k'(x) = 0$

$f_k'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - ke^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow ke^{-x} = 1$

$\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{k}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{x}} = \frac{1}{k}$

$\Leftrightarrow e^{x} = k$

$\Leftrightarrow x = \ln(k)$

le min appartient à la courbe.

donc $A_k(x ; y) \Leftrightarrow A_k(\ln(k) ; f(\ln k))$

$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + ke^{-\ln(k)}$

$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + k\frac{1}{e^{\ln k}}$

$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + \frac{k}{e^{\ln k}}$

$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + 1$

$e^{\ln x} = x$

$a^b = e^{b \ln a}$.

Donc tout les A_k sont sous la forme

$A_k(\ln(k) ; \ln(k) + 1)$

$y = \ln(k) + 1$

$\forall k \in \mathbb{R}_+^* \quad A_k \in y = x + 1$

Plus de bonnes notes

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

1. On cherche les variation de f à l'aide du signe de f'

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

$\ln(x)' = \frac{1}{x}$

$\ln(u)' = \frac{u'}{u}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$u = 20x \quad v = 1-x$

$u' = 20 \quad v' = -1$

$$\left(\frac{20x}{1-x}\right)' = \frac{20(1-x) - 20x\times(-1)}{(1-x)^2} = \frac{20 - \cancel{20x} + \cancel{20x}}{(1-x)^2} = \frac{20}{(1-x)^2}$$

$$\left(\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)\right)' = \frac{\frac{20}{(1-x)^2}}{\frac{20x}{1-x}} = \frac{\cancel{20}}{(1-x)^{\cancel{2}}} \times \frac{\cancel{(1-x)}}{\cancel{20}x} = \frac{1}{(1-x)x}$$

$$f'(x) = 30 \times \frac{1}{(1-x)x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{30}{x(1-x)}}$$

Etudions le signe du dénominateur car le numérateur est toujours positif.

x	0		1
x		$+$	
$1-x$		$+$	ϕ
$x(1-x)$		$+$	ϕ
$f(x)$		$\nearrow$	

donc f est strictement croissante sur $]0\,;1[$

Plus de bonnes notes

2. Comme f est strictement croissante, on cherche les valeurs de x tel que $20 < f(x) < 120$.

$f(x) = 20$

$$\iff 30 \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = 20$$

$$\iff \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\iff \frac{20x}{1-x} = e^{2/3}$$

$$\iff 20x = e^{2/3}(1-x)$$

$$\iff 20x = e^{2/3} - xe^{2/3}$$

$$\iff 20x + xe^{2/3} = e^{2/3}$$

$$\iff x\left(20 + e^{2/3}\right) = e^{2/3}$$

$$\iff x = \frac{e^{2/3}}{20 + e^{2/3}} \simeq 0,089.$$

α.

$f(x) = 120.$

$$\iff 30 \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = 120$$

$$\iff \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = 4$$

$$\iff \frac{20x}{1-x} = e^4$$

$$\iff 20x + xe^4 = e^4$$

$$\iff x\left(20 + e^4\right) = e^4$$

$$\iff x = \frac{e^4}{20 + e^4} = 0,73.$$

β.

Or f est strictement croissante sur $]0,1[$ donc pour que $20 < f(x) < 120$ il faut que

$$x \in [0,089 \,;\, 0,73]$$

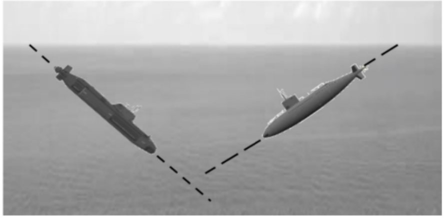
Entre 8,9 et 73 cm.

Plus de bonnes notes

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée.
On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.
À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$ dont l'unité est le mètre.



Le plan défini par $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}.$$

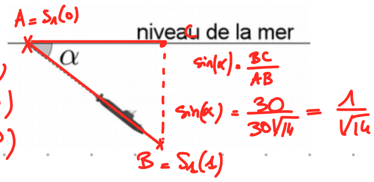
a) Donner les coordonnées du sous-marin au début de l'observation.

b) Quelle est la vitesse du sous-marin ?

2. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.

Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal.
On donnera l'arrondi de α à 0,1 degré près.

$A = (140 ; 105 ; -170)$
$B = (80 ; 15 ; -200)$
$C = (80 ; 15 ; -170)$



$BC = \sqrt{30^2} = 30$

1. $S_1(0) = (140, 105, -170)$. pour $t = 0$ début

2. $A = S_1(0) = (140, 105 ; -170)$

$B = S_1(1) = (80 ; 15 ; -200)$

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}$

$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (-30)^2} = 30\sqrt{14}$ m

On trouve une vitesse de $30\sqrt{14}$ m/min

ce qui fait

$$\frac{30\sqrt{14}}{1} \frac{\text{m}}{\text{min}} = \frac{30\sqrt{14} \times 10^{-3}\ \text{km}}{1/60\ \text{h}} = 30\sqrt{14} \times 10^{-3} \times 60$$

$= 6,73$ km/h.

Plus de bonnes notes

On a $A(140\,;105\,;-170)$

$B(80\,;15\,;-200)$

On prend C le point de l'espace à la verticale de B ayant la même profondeur que A.
(projeté orthogonal de B sur le niveau de la mer)

On a alors un triangle rectangle en C.

$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{30}{30\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \approx 0{,}26$$

donc $\alpha = \sin^{-1}(0{,}26) = 15{,}1°$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = 15{,}5°.$$

3. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\,;135\,;-68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\,;-405\,;-248)$ avec une vitesse constante.
À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

$D = S_2(0)$

$E = S_2(3)$

On peut trouver une représentation paramétrique de (DE).

$D(68\,;135\,;-68)$

$E(-202\,;-405\,;-248)$

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-270\\-540\\-180\end{pmatrix}$$

donc (DE)
$$\begin{cases} x(t) = 68 - 270t \\ y(t) = 135 - 540t \\ z(t) = -68 - 180t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(AB) \begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad (DE) : \begin{cases} x(t) = 68 - 270t' \\ y(t) = 135 - 540t' \\ z(t) = -68 - 180t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$