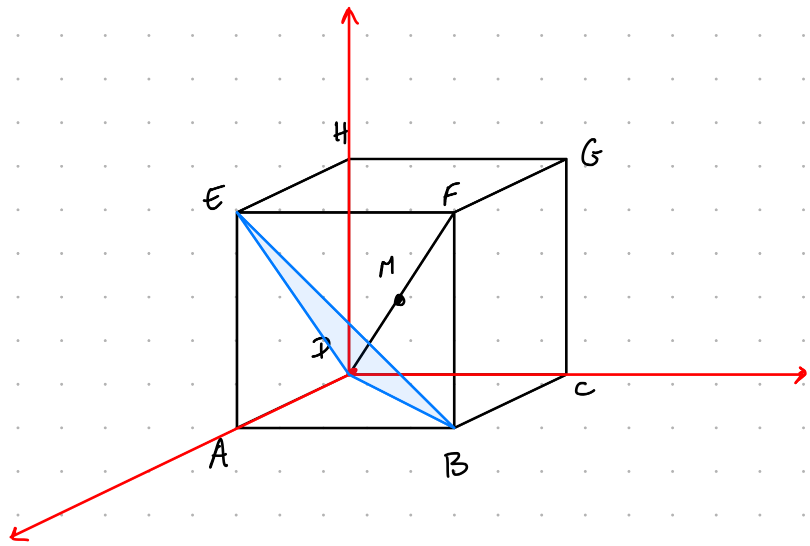
Plus de bonnes notes

Bac S Liban Juin 2017

Exercice 1 :



1. Montrons que $\vec{DF}$ est normal au plan (EBG)

- Dans le repère $(D;\vec{DA};\vec{DC};\vec{DH})$ on a :

$D(0;0;0)$; $F(1;1;1)$; $E(1;0;1)$; $B(1;1;0)$; $G(0;1;1)$

$\vec{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{EB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{EG}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

On peut donc calculer $\longrightarrow$ $\vec{DF}\cdot\vec{EB} = 1\times 0 + 1\times 1 + 1\times(-1)$
$= 0 + 1 - 1 = 0$

$\longrightarrow$ $\vec{DF}\cdot\vec{EG} = 1\times(-1) + 1\times 1 + 1\times 0$
$= -1 + 1 + 0$
$= 0$

$\vec{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non-colinéaires du plan
donc $\vec{DF}$ est normal au plan (EBG)

2. Déterminons une équation cartésienne du plan (EBG)

On a $\vec{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $(EBG) : x+y+z+d=0$.

or $E \in (EBG)$ et $E(1;0;1)$

donc $(EBG) : 1+0+1+d=0 \Rightarrow d=-2$

Plus de bonnes notes

Donc $(EBG) : x+y+z-2=0$.

3. Cherchons I le point d'intersection de (DF) et (EBG)

vecteur directeur

point de la droite

Une représentation paramétrique de (DF) est : $\begin{cases} x = 1t + 0 \\ y = 1t + 0 \\ z = 1t + 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Les coordonnées de I doivent vérifier :

$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \quad , t \in \mathbb{R} \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$

donc il en résulte

$3t - 2 = 0 \iff t = \frac{2}{3}$

Donc $I\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$

Partie B :

1. On cherche θ si M est confondu avec D.

$\theta = \widehat{EMB} = \widehat{EDB} = \frac{\pi}{3}$

car $\widehat{EDB}$ est équilatéral donc les 3 angles du triangles sont identique.

On cherche θ si M est confondu avec F.

$\theta = \widehat{EMB} = \widehat{EFB} = \frac{\pi}{2}$ car EFB est rectangle en F.

2. a. Justifions que les coordonnées de M sont $(x ; x ; x)$

$\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ or $D(0;0;0)$

donc $M(x ; x ; x)$

Plus de bonnes notes

b. Montrons que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$

On sait que $\vec{ME}\cdot\vec{MB} = \|\vec{ME}\| \times \|\vec{MB}\| \times \cos(\theta)$

$\vec{ME}\begin{pmatrix}1-x\\-x\\1-x\end{pmatrix}$ $\quad\vec{MB}\begin{pmatrix}1-x\\1-x\\-x\end{pmatrix}$ $\quad\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec{ME}\cdot\vec{MB} = (1-x)^2 - x(1-x) - x(1-x)$

$= 1-2x+x^2 - x + x^2 - x + x^2$

$= 3x^2-4x+1$

$3x^2-4x+1 = \sqrt{(1-x)^2+(-x)^2+(1-x)^2} \times \sqrt{(1-x)^2+(1-x)^2+(-x)^2} \times \cos\theta$.

$\sqrt{a}\times\sqrt{a} = a$

$3x^2-4x+1 = \left((1-x)^2+(-x)^2+(1-x)^2\right)\cos\theta$

$3x^2-4x+1 = (1-2x+x^2+x^2+1-2x+x^2)\cos\theta$

$3x^2-4x+1 = (3x^2-4x+2)\cos\theta$

$\Longrightarrow \cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$.

3. Le triangle MEB est rectangle en M si :

$\cos(\theta) = \cos(\widehat{EMB}) = 0$.

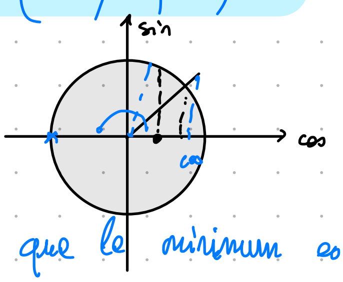
On lit sur le tableau de variation que $\cos\theta = 0$ pour

$x = \dfrac{1}{3}$ et $x = 1$

⚠ $M(x\,;x\,;x)$

Donc c'est lorsque M est sur $J\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

ou M est sur $F(1\,;1\,;1)$



cos est decroissant sur $[0;\pi]$

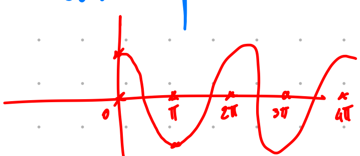
$\cos 0 = 1$

$\cos\pi = -1$

et cos est monotone sur $[0;\pi]$

b. l'angle est maximal lorsque,

$\cos(\theta)$ est minimal donc on lit que le minimum est atteint pour $x = \dfrac{2}{3}$ donc $M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

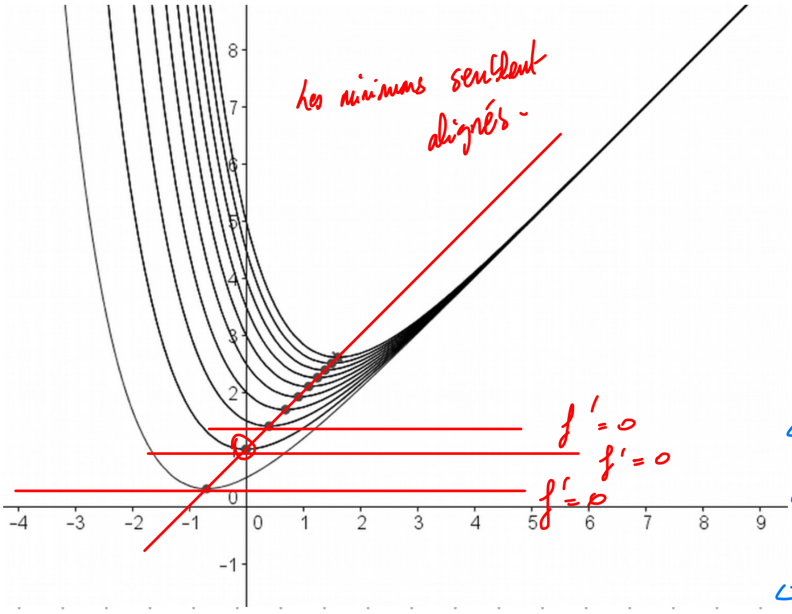


donc lorsque M est confondu avec I.

Plus de bonnes notes

Exercice 3 :

$f_k(x) = x + ke^{-x}$



$f_k'(x) = 1 - ke^{-x}$

le minimum correspond à $f_k'(x) = 0$

$f_k'(x) = 0$

$\iff 1 - ke^{-x} = 0$

$\iff ke^{-x} = 1$

$\iff e^{-x} = \frac{1}{k}$

$\iff \frac{1}{e^x} = \frac{1}{k}$

$\iff e^x = k$

$\iff \boxed{x = \ln(k)}$

le min appartient à la courbe.

donc $A_k(x\,;y) \iff A_k(\ln(k)\,;f(\ln k))$

$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + ke^{-\ln(k)}$

$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + k\frac{1}{e^{\ln k}}$

$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + \frac{k}{e^{\ln k}}$

$\boxed{f_k(\ln(k)) = \ln(k) + 1}$

$e^{\ln x} = x$

$a^b = e^{b \ln a}$

Donc tout les A_k sont sous la forme

$\boxed{A_k(\ln(k)\,;\ln(k)+1)}$

$\boxed{y = \ln(k) + 1}$

$\boxed{\forall k \in \mathbb{R}_+^* \quad A_k \in y = x + 1}$