Dimanche 12 mars 2023. 1ère : Spé maths.

Exercice 12

5. $\cancel{(e^x+3)} \times \dfrac{2e^x}{\cancel{(e^x+3)}} < \dfrac{1}{2} \times (e^x+3)$.

$$2 \times 2e^x < \frac{1}{\cancel{2}} \times (e^x+3) \times \cancel{2}$$

$$4e^x < e^x + 3.$$

$$4e^x - e^x < 3.$$

$$3e^x < 3.$$

$$e^x < 1.$$

$$e^x < e^0$$

$$x < 0$$

$e^a < e^b$

$a < b$.

$$S = \,]-\infty ; 0[.$$

6. $e^x + e^{-x} \geq 2$

$f(x) = e^x + e^{-x}$

Nous avons déja démontrer que dans l'exercice précédent $f(x) \geq 2$, quelque soit le nombre réel x

$S = \mathbb{R}$

Exercice 14

$$f'(t) + 6f(t) = 0.$$

$$f(t) = 2e^{-6t}$$

$(e^u)'$

$u'e^u$.

$x^2 \to 2x$

$2x^2 \to 4x$

$$f'(t) = 2 \times (-6) \times e^{-6t}$$

$$f'(t) = -12 \times e^{-6t}$$

$$f'(t) + 6f(t) = -12 \times e^{-6t} + 6 \times 2e^{-6t}$$
$$= -12e^{-6t} + 12e^{-6t}$$
$$= 0.$$

Exercice 15.

$g(x) = e^x - x - 1.$

1) $g'(x) = e^x - 1$. Étudions le signe de $g'(x)$:

$$e^x - 1 \geq 0.$$
$$e^x \geq 1.$$
$$e^x \geq e^0$$
$$x \geq 0.$$

On dresse le tableau de variation de g à l'aide du signe de $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Varº de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$. (d'après le tableau de variation).

3) $e^x - x - 1 \geq 0.$

$$\boxed{e^x - x \geq 1 > 0.}$$

Exercice 16.

$f(x) = e^x$

$g(x) = 1 - e^{-x}$

2. Par définition, le coefficient directeur de la tangente à C_f en a :

$f'(a) = e^a.$

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

Par définition, le coefficient directeur de la tangente à C_g en b:

$g'(b) = e^{-b}.$

$g(x) = 1 - e^{-x}$

$g'(x) = (-1) \times (-1) e^{-x}.$

$g'(x) = e^{-x}.$

$f'(a) = g'(b).$

$e^a = e^{-b}$

$a = -b.$

$f(x) = \overbrace{(ax+b)}^{u} \, \overbrace{e^{-x}}^{v}$

$f'(x) = \ldots\ldots$

Exercice 17 : 1. $f'(1) = 0$

plus de bonnes notes
le soutien scolaire connecté

$f(x) = (ax+b)e^{-x}$

$u(x) = (ax+b)$ $\quad v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = a$ $\quad v'(x) = -e^{-x}$

$f'(x) = a e^{-x} + (-e^{-x}) \times (ax+b)$

$f'(x) = e^{-x}(a - ax - b)$

$f'(1) = 0$

$e^{-1}(a - a - b) = 0$

$e^{-1} \times (-b) = 0$

$b = 0$

La fonction exponentielle

I. Découverte de la fonction exponentielle

1. Définition

Théorème n°1 (admise) : Il existe une fonction f vérifiant :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$;
- $f(0) = 1$.

Théorème n°2 (dém en TD exo n°1) : Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$;
- $f(0) = 1$.

Alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0}$$

Autrement dit, la fonction f définie par les deux points précédents, si elle existe, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Théorème n°2 (dém en TD exo n°2) : Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$;
- $f(0) = 1$.

Alors :

$$\boxed{elle\ est\ unique}$$

Définition n°1 : La fonction f dont on vient de parler dans la question précédente s'appelle la fonction exponentielle. On la note exp, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\boxed{\begin{cases} exp(0) = 1 \\ exp'(x) = exp(x) \end{cases}}$$

II. Propriétés de la fonction exponentielle

Théorème n°3 (dém en TD exo n°3) : Soient deux nombres réels x et y. Alors, la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle s'écrit :

$$\boxed{exp(x + y) = exp(x) \times exp\ (y)}$$

Propriété n°1 (dém en TD exo n°4) : Quel que soit le nombres $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}}$$

Propriété n°2 (dém en TD exo n°5) : Quels que soient les nombres x et y que l'on choisit dans l'ensemble des nombres réels, on a :

$$\boxed{exp(x - y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}}$$

Propriété n°3 (dém admise en 1ère) : Pour tout réel x et pour tout entier relatif n, on a :

$$\boxed{(exp(x))^n = exp(n \times x)}$$

2. Notation simplifiée

Définition n°2 : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée :

$$\boxed{exp(1) = e}$$

On précise que e est un nombre irrationnel et on donne une valeur approchée de e à 10^{-6} près.

$$e \approx 2{,}718\ 282$$

Nous remarquons que toutes les propriétés et théorèmes précédemment énoncées satisfont les propriétés sur les puissances :

- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y) \Leftrightarrow e^{x+y} = e^x + e^y$;

- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;
- $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \Leftrightarrow e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$;
- $(\exp(x))^n = \exp(nx) \Leftrightarrow (e^x)^n = e^{nx}$;
- $\exp(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 = 1.$

Ainsi, dans un souci de simplification de la notation de la fonction exponentielle, on notera désormais :

$$\boxed{exp(x) = e^x}$$

III. Étude de la fonction exponentielle

1. Le signe de la fonction exponentielle

Propriété n°4 (dém en TD exo n°6) : On a :

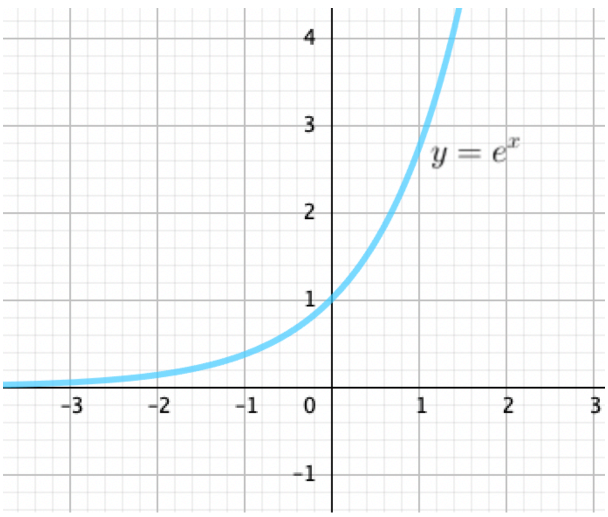
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0}$$

En d'autres termes la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2. Variations de la fonction exponentielle

Propriété n°5 (dém en TD exo n°7) : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, voici la courbe représentative de la fonction exponentielle :



En voici le tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

Propriété n°6 (dém en TD exo n°7) : Soit u une fonction définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$. On pose la fonction définie par :

$$f(x) = e^{u(x)}$$

Alors, on a :

$$\boxed{\forall x \in I, f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}}$$

3. Équations et inéquations

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \\ e^a < e^b \Leftrightarrow a < b \\ e^a > e^b \Leftrightarrow a > b \end{cases}}$$

IV. Exercices

Exercice n°1

Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

- $f'(x) = f(x)$;
- $f(0) = 1$.

On a la propriété suivante : $u'(-x) = -u'(x)$. On précise que u est une fonction définie et dérivable sur $I \subseteq \mathbb{R}$.

1. On pose ϕ, une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$\phi(x) = f(x) \times f(-x)$$
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = 0$.
3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = 1$. On pourra utiliser le fait que $f(0) = 1$.
4. On suppose maintenant qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$. Calculer alors la valeur numérique de $\phi(x_0)$.
5. On a déjà établi que $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = 1$. Alors, le résultat de la question 4 vous semble-t-il pertinent ?
6. Conclure.

Exercice n°2

Méthode générale pour démontrer **l'unicité** d'une fonction u définie et dérivable sur $I \subseteq \mathbb{R}$ et caractérisée par deux propriétés P_1 et P_2 :

- Par **l'absurde**, on suppose qu'il existe une autre fonction v (différente de u) caractérisée exactement de la même manière que u. C'est-à-dire qu'on suppose que u est définie et dérivable sur $I \subseteq \mathbb{R}$ et que u vérifie les propriétés P_1 et P_2.
- On effectue un raisonnement sur u et v basé sur les définitions, propriétés, connaissances vraies dont la conclusion est que $u = v$.
- Or dire que $u = v$ est contradictoire puisque nous avons supposé que $u \neq v$.
- On conclut donc que ce que nous avons supposé ($u = v$) est faux. C'est donc le contraire qui est vrai. Ainsi, il ne peut pas exister une autre fonction v caractérisée exactement de la même manière que u

Supposons qu'il existe une autre fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

- $f'(x) = f(x)$;
- $f(0) = 1$.

On suppose par ailleurs l'existence d'une autre fonction $g \neq f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $g'(x) = g(x)$;
- $g(0) = 1$.

1. On pose $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. Déterminez l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de h.
2. Démontrez que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0$.
3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x)$.
4. Conclure.

Exercice n°3

Soit $b \in \mathbb{R}$. On considère la fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{\exp(x+b)}{\exp\,(b)}$$

1. Démontrer que $h(0) = 1$.
2. Démontrer que $h'(x) = h(x)$.
3. Connaissant l'unicité de la fonction exp, quelle est la relation mathématique entre $h(x)$ et $\exp\,(x)$?
4. Nous savons que la fonction h est définie pour tout nombre réel x. En particulier, lorsque x prend une valeur a, donner l'expression de $h(a)$.
5. En déduire la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle.

Exercice n°4

Soit x un nombre réel. On considère la fonction exponentielle définie par $\exp'(x) = \exp(x)$ et par $\exp(0) = 1$.

La fonction ϕ définie dans l'exercice **n°1** est telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = 1$$

En utilisant la relation précédente démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

Exercice n°5

Nous avons déjà démontré la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x + y) = \exp(x) + \exp(y)$$

Soient x et y deux nombres réels $\left((x; y) \in \mathbb{R}^2\right)$

1. Écrire $x - y$ sous la forme d'une somme.
2. En utilisant la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle, déduire que $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Exercice n°6

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Réduisez de deux manières différentes l'expression $e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}$.
2. En déduire que pour nombre réel x, $e^x \geq 0$.
3. Enfin, démontrer que pour tout nombre réel x, $e^x > 0$.

Exercice n°7

Définissons une fonction a sur un intervalle I et une autre fonction b sur un intervalle J telle que $b(x) \in I$. On a alors la fonction schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} J & \rightarrow & I & & \\ x & \overset{b}{\rightarrow} & b(x) & & \\ & & b(x) & \overset{a}{\rightarrow} & a\left(b(x)\right) \end{array}$$

Cette opération s'appelle la composition des fonctions a et b et on peut également noter :

$$a\left(b(x)\right) = a \circ b\,(x)$$

Dans ces conditions, on a la propriété suivante, pour tout réel $x \in J$:

$$\boxed{f(x) = a\left(b(x)\right) \Rightarrow f'(x) = b'(x) \times a'\left(b(x)\right)}$$

En utilisant la propriété précédente, démontrer que :

$$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

Exercice n°8

Simplifiez les expressions suivantes :

1. $\frac{e^3 \times e^2}{e^6}$
2. $\frac{e^3 \times e^4}{e^{-5}}$
3. $\frac{1}{e^{-1}}$
4. $(e^{3x+2})^2$
5. $\frac{e^{5x+7} \times e^{-x-3}}{e^{2x+3}}$
6. $\frac{e^{-5}}{e^2}$

Exercice n°9

Calculer l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = e^{2x+3}$
2. $f(x) = 7e^{-\frac{1}{2}x+2}$
3. $\left(\frac{3}{4}x + 1\right) \times e^x$
4. $f(x) = e^{x^2}$
5. $f(x) = 3x^2 \times e^{-2x+3}$
6. $f(x) = \frac{7}{e^{x^2+3}}$

Exercice n°10

Étudier les variations des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = e^{3x}$
2. e^{-2x+3}
3. $f(x) = (2x + 3) \times e^{3x+1}$
4. $f(x) = \frac{2x+3}{e^{-2x+3}}$
5. $f(x) = (-2x^2 + 5x - 4) \times e^{-\frac{1}{2}x}$
6. $f(x) = \frac{-2x+3}{e^{5x}}$

Exercice n°11

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $e^x = 1$
2. $e^{x+3} = e^2$
3. $e^x + e^{-x} = 1$
4. $e^{-x+4} = (e^{-x})^4$
5. $e^{x^2-4} = (e^{x+2})^2$
6. $\frac{4e^x-1}{1-e^x} = -1$

Exercice n°12

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{\frac{x}{2}} < e$
2. $e^{-x+4} > e^x$
3. $e^{x^2} \leq (e^x)^2$
4. $e^{2x} + 3e^x - 4 \geq 0$
5. $\frac{2e^x}{e^x+3} < \frac{1}{2}$
6. $e^x + e^{-x} \geq 2$

Exercice n°13

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = -3e^x$.

1. Vérifier que $f' = f$.
2. Calculer $f(0)$.

Exercice n°14

On considère la fonction f définie pour réel t par $f(t) = 2e^{-6t}$.

1. Vérifier que $f'(t) + 6f(t) = 0$.

Exercice n°15

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudiez les variations de la fonction g.
2. Déterminez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout $x \in [0; +\infty[, e^x - x > 0$.

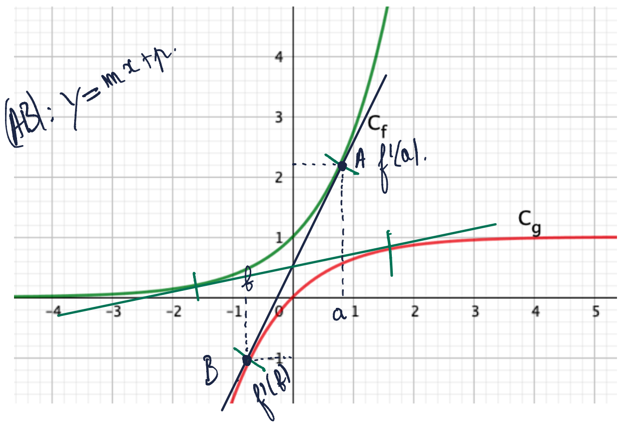
Exercice n°16

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1 - e^x$. Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont fournies en aval.

1. Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracez au mieux ces tangentes sur la figure fournie.

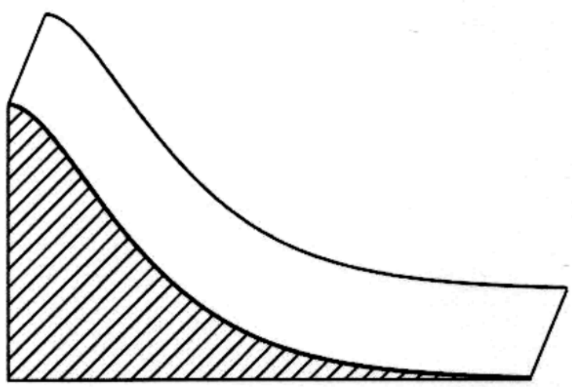
On admet l'existence de ces tangentes communes. On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b.

2. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
3. Exprimez en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.
4. En déduire que $b = -a$.



Exercice n°17

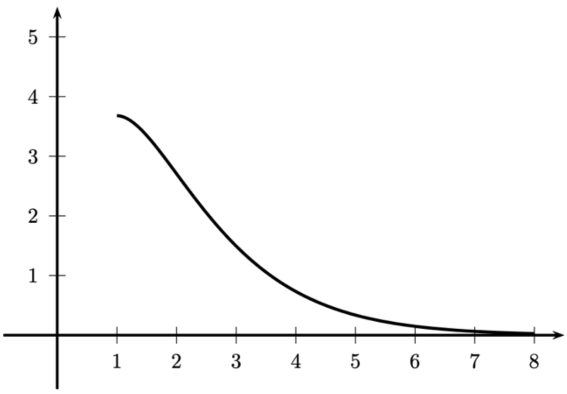
Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan :



Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 8]$ par :

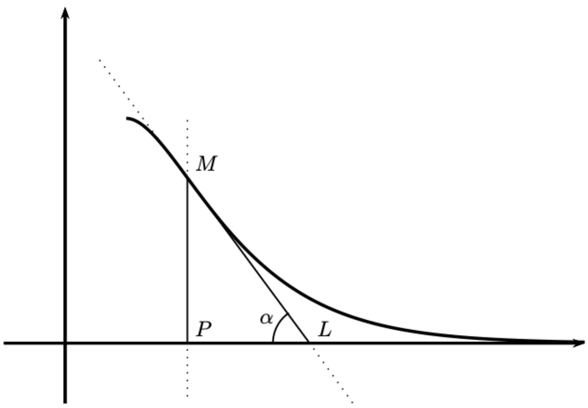
$$f(x) = (ax + b)e^{-x}$$

Où a et b sont deux entiers naturels. La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en sont point d'abscisse 1 soit horizontale. Déterminez alors la valeur de l'entier b.
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre $3{,}5$ et 4 mètres de haut. Déterminez alors la valeur de a.

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pende maximale du toboggan. On considère le point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses. La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à $55°$.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1; 8]$. On admet que, pour tout x de cet intervalle, $f'(x) = 10(1 - x)e^{-x}$. Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1; 8]$.
4. Soit x un réel de l'intervalle $[1; 8]$, et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. Justifiez que $\tan(\alpha) = |f'(x)|$.
5. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées.

Exercice n°18

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Justifiez que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point en commun ?

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

3. Justifiez que, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
4. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.
5. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0; +\infty[$ que l'on déterminera. En donner une interprétation graphique.