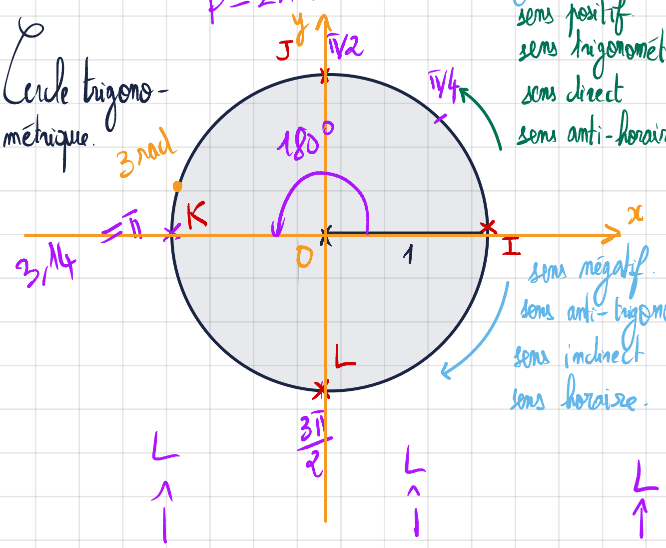
Mercredi 22 mars 2023.

1ère : Trigonométrie

$P = 2 \times \pi \times R = 2\pi$

Cercle trigonométrique.



sens positif
sens trigonométrique
sens direct
sens anti-horaire

sens négatif
sens anti-trigonométrique
sens indirect
sens horaire.

$L \leftarrow \frac{3\pi}{2} + 2\pi$ $\quad$ $L \leftarrow \frac{3\pi}{2} + 2 \times 2\pi$ $\quad$ $L \leftarrow \frac{3\pi}{2} + 3 \times 2\pi$

$\frac{3\pi}{2} + 4 \times 2\pi$ $\quad$ $\frac{3\pi}{2} + k \times 2\pi$

$45° \longleftrightarrow \frac{\pi}{4}$

$180° \rightleftarrows \pi$ rad.

$360° \rightleftarrows 2\pi$

$60° \longleftrightarrow \frac{\pi}{3}$ rad.

$30° \longleftrightarrow \frac{\pi}{6}$

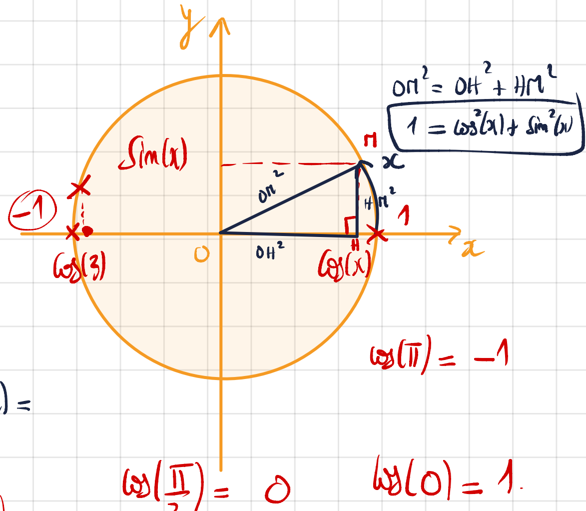
$\frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

angle en °: 0 à 360°.

$\frac{180}{\pi}° \longleftrightarrow 1$ rad ?

$180 \longleftrightarrow \pi$ rad

3 rad.



$\cos(\pi) = -1$

$\cos(x) =$

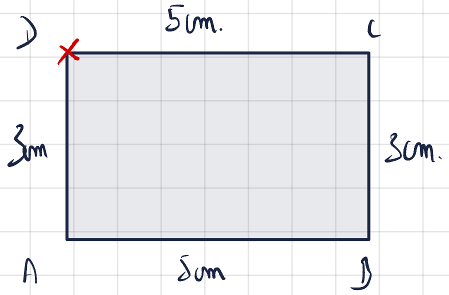
$\cos(3)$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad$ $\cos(0) = 1.$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$ $\quad$ $\cos(2\pi) = 1$

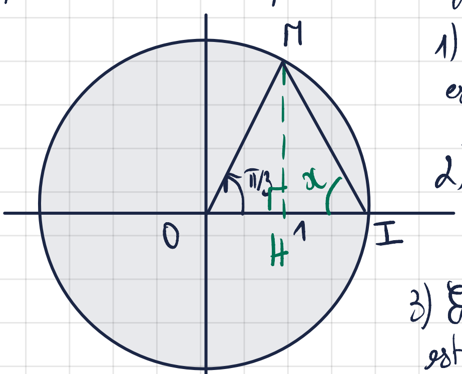
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1.$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$



Application : valeurs remarquables cercle trigonométrique.



1) Prouver que OMI est isocèle en O.

2) Montrer que $\widehat{OMI} = \widehat{OIM} = \frac{\pi}{3}$

3) En déduire que OMI est équilatéral.

4) Construire le projeté orthogonal de M sur (OI) appelé H. Donner OH. Calculer HM. En déduire $\sin\frac{\pi}{3}$ et $\cos\frac{\pi}{3}$.

1) $OM = OI = 1$. Donc OMI est isocèle en O.

2) $\widehat{OMI} + \widehat{OIM} + \widehat{MOI} = \pi$

$x + x + \frac{\pi}{3} = \pi$

$2x + \frac{\pi}{3} = \pi$

$2x = \pi - \frac{\pi}{3}$

$2x = \frac{2\pi}{3}$

$x = \frac{2\pi}{3} \times \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3}$

Le triangle OMI est donc équilatéral car il a 3 angles de même mesure : $\frac{\pi}{3}$.

4. Comme OMH est équilatéral (MH) coupe [OI] en son milieu. $OH = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}}$$

Le triangle OMH est rectangle en H d'où :

$$MH^2 = OM^2 - OH^2$$

$$MH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$MH^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$MH^2 = \frac{3}{4}$$

$$MH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

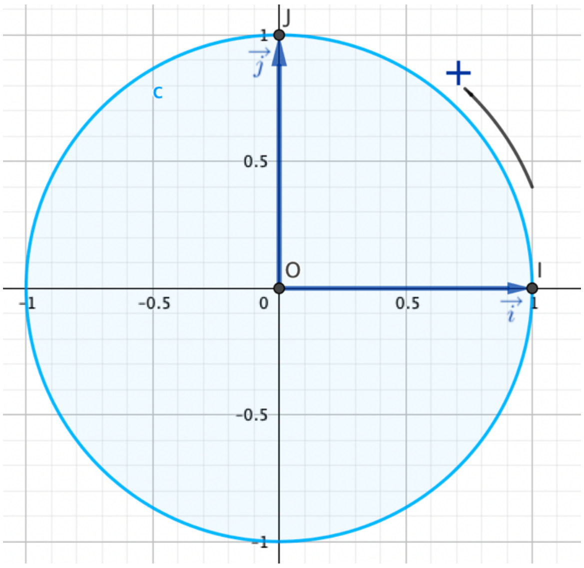
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Trigonométrie et fonctions trigonométriques

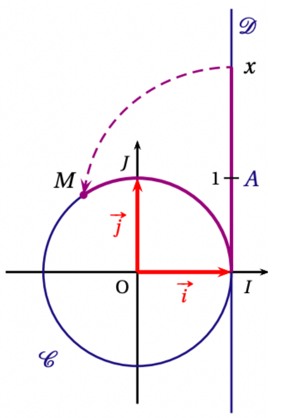
I. Une nouvelle unité de mesure des angles

1. Le cercle trigonométrique

Définition : Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O (l'origine du repère) et de rayon 1. Le cercle est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre aussi appelé le sens direct ou bien sens trigonométrique.



2. Enroulement de la droite numérique



On construit une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par le point I. Nous graduons cette droite de la manière ci-contre. Enfin nous enroulons la droite $\mathcal{D}$ autour du cercle trigonométrique. Cette action va faire correspondre tous les points de la droite $\mathcal{D}$ à un unique point sur le cercle trigonométrique.

Définition : A chaque abscisse x de la droite $\mathcal{D}$, on associe un unique point sur le cercle trigonométrique appelé « le point image ».

Propriété (dém trivale) : Deux nombres réels x et x' sur la droite $\mathcal{D}$ ont le même point image sur le cercle trigonométrique si et seulement s'ils sont tels que :

il existe — ens des entiers relatifs

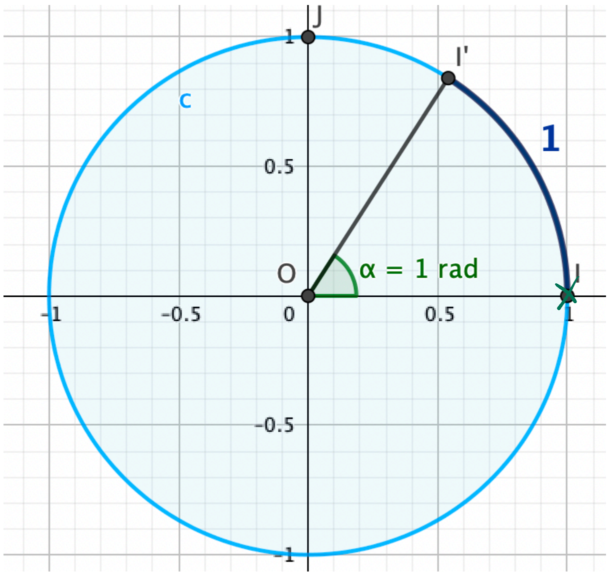
$$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z}, x - x' = k \times 2\pi}$$

Application : $x = \frac{\pi}{6}$ → M point image.
$x' = \frac{19\pi}{6}$ → M' point image.
Comment sont disposés M et M' ?

$x' - x = \frac{19\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{18\pi}{6} = 3\pi = 2\pi + \pi$. M' et M sont diamétralement opposés

2. Angle en radian

Définition : Soit le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. On considère une unité de radian est l'angle dont le sommet est l'origine O du repère et qui intercepte le cercle $\mathcal{C}$ sur un arc de longueur 1.



En conséquence, on a les égalités suivantes :

- $180° = \pi\ rad$;
- $360° = 2\pi\ rad$;
- La mesure d'un angle en radians et en degrés sont proportionnelles.

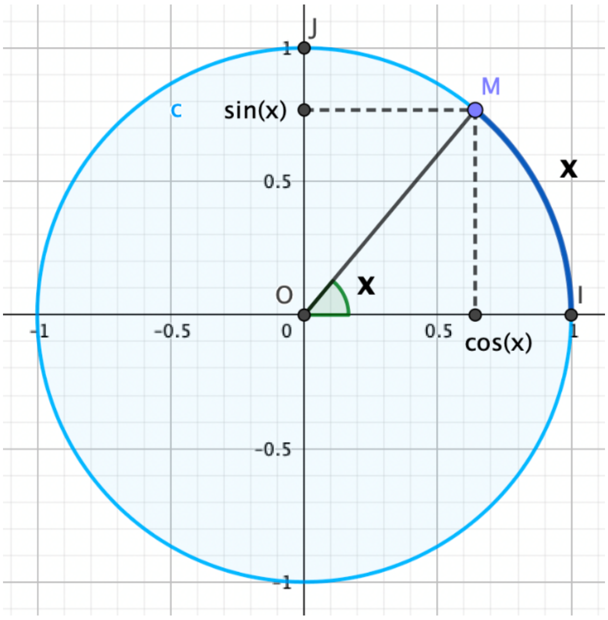
45° → rad
270° → rad

II. Cosinus et sinus d'un angle

1. Quelques généralités

Définition : On considère un réel x sur la droite $\mathcal{D}$ qui a pour image le point M sur le cercle trigonométrique. Dans ces conditions, on a :

- $\cos(x) = x_M$: le cosinus de x est l'abscisse du point M.
- $\sin(x) = y_M$: le sinus de x est l'ordonnée du point M.



Propriété (dém en TD exo n°1) : Pour tout nombre réel x, on a :

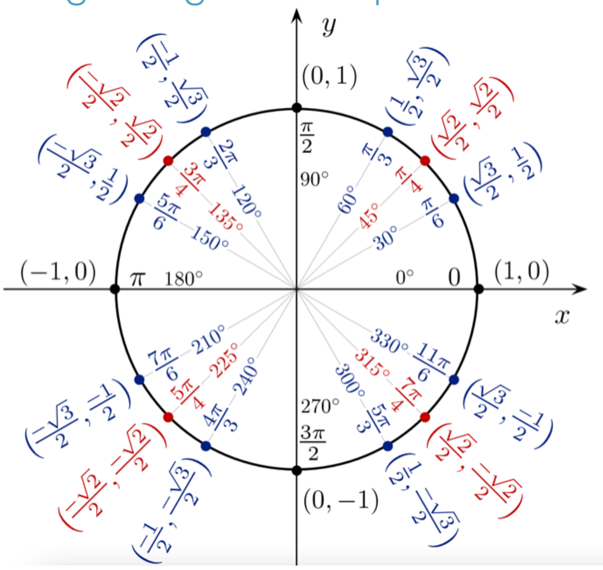
$$\boxed{\begin{cases} -1 \leq cos(x) \leq 1 \\ -1 \leq sin(x) \leq 1 \\ cos^2(x) + sin^2(x) = 1 \end{cases}}$$

2. Valeurs remarquables

Voici le tableau de valeurs des cosinus et des sinus d'angles remarquables à connaître par cœur (**dém en TD exo n°3**)

Angles	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$
$\mathbf{cos}\ (x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathbf{sin}\ (x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3. Lignes trigonométriques

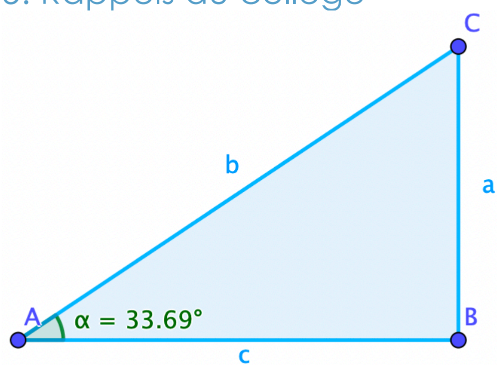


4. Angles associés

Propriétés : Pour tout réel x, on a :

- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $cos(\pi - x) = -cos(x)$
- $sin(\pi + x) = -sin(x)$
- $cos(\pi + x) = -cos(x)$
- $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos(x)$
- $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin(x)$
- $sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos(x)$
- $cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sin(x)$

5. Rappels du collège



Dans un triangle rectangle, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} cos(\hat{A}) = \dfrac{côté\ adjacent}{hypoténuse} = \dfrac{c}{b} \\ sin(\hat{A}) = \dfrac{côté\ opposé}{hypoténuse} = \dfrac{a}{b} \\ tan(\hat{A}) = \dfrac{côté\ opposé}{adjacent} = \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

6. Équations trigonométriques

Voici une méthode générale pour résoudre les équations trigonométriques.

1. Équations du style $cos(x) = a$

a) On vérifie si $a \notin [-1;1]$, alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Alors $S = \emptyset$.

b) Si $a \in [-1;1]$, on trouve grâce aux angles remarquables dans le cercle trigonométrique, un angle α tel que : $\cos(\alpha) = a$.

c) Les solutions de l'équation sont alors toutes valeurs suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} x = \alpha + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\alpha + k' \times 2\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

2. Équations du style $sin(x) = a$

a) De même, si $a \notin [-1;1]$, alors l'équation n'admet pas de solutions réelles. Alors $S = \emptyset$.

b) Si $a \in [-1;1]$, on trouve grâce aux angles remarquables dans le cercle trigonométrique un angle α tel que : $\sin(\alpha) = a$.

c) Les solutions de l'équation sont alors toutes les valeurs suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} x = \alpha + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \alpha + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

III. Fonctions trigonométriques

1. Fonction cosinus et sinus

Définition : on a :

- La fonction cosinus est la fonction qui à tout réel x, associe $\cos(x)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

- La fonction sinus est la fonction qui à tout réel x, associe $\sin(x)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

Propriété (dém en TD exo n°2) : La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

Propriété (dém triviale) : Les fonctions sinus et cosinus sont $2\pi -$périodiques. Autrement dit, pour tout réel x, on a :

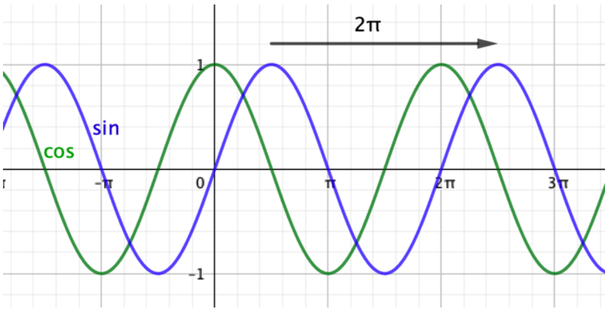
- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$

2. Courbes représentatives

Définition : Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont des sinusoïdes.

Propriétés : On a les propriétés suivantes :

- Les fonctions sinus et cosinus étant $2\pi -$ périodiques, les courbes représentatives sont identiques par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
- La fonction cosinus étant paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction sinus étant impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère O.



3. Étude des fonctions trigonométriques

Propriété (admise) : Si f est la fonction cosinus et g la fonction sinus, alors f et g sont dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $f'(x) = -\sin(x)$;
- $g'(x) = \cos(x)$.

Propriété : Soient a et b deux réels quelconques. En notant $f: x \longmapsto \cos(u(x))$ et $g: x \longmapsto \sin(u(x))$, alors f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :

- $f'(x) = -u'(x) \times \sin\big(u(x)\big)$;
- $g'(x) = u'(x) \times \cos\big(u(x)\big)$.

III. Exercices

Exercice n°1

1. Dessiner le cercle trigonométrique.
2. Placer sur le cercle trigonométrique le point image M correspondant à un réel $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Tracer la perpendiculaire à (Ox) et à (Oy) passant par M et, placez $\cos(x)$ et $\sin(x)$ correspondant respectivement aux points N et P.
4. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$.
5. Quelle est la nature du triangle OMN ?
6. Quelle est l'expression de ON ? Et de MN ?
7. Démontrez alors que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Exercice n°2

1. Rappeler la définition d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. En vous basant sur les définitions mentionnées, démontrer que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.

Exercice n°3

1. Sur le cercle trigonométrique, placer le point A correspondant à la valeur $\frac{\pi}{6}$.
2. Placer les points A_1, A_2, A_3 associés aux réels $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{9\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$.
3. Rappelez le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{6}$.
4. Par des considérations géométriques, déterminez le cosinus et le sinus des angles $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{9\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice n°4

Donner la valeur exacte en radian de tous les angles d'un triangle :

1. Rectangle isocèle ;
2. Équilatéral.

Exercice n°5

Dessine le cercle trigonométrique. Placez-y les points représentatifs des réels suivants :

1. $\frac{2\pi}{3}$
2. $-\frac{3\pi}{4}$
3. $\frac{17\pi}{6}$
4. $\frac{5\pi}{2}$

Exercice n°6

1. En utilisant les angles associés, exprimez les expressions suivantes en fonctions de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:
   a. $A = \sin(x+\pi) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x) - \sin(-x)$
   b. $B = \cos(x) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(x-\pi) + \cos(\pi - x)$
2. Calculez les expressions suivantes en utilisant les angles associés :
   a. $C = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{23\pi}{14}\right)$
   b. $D = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{5}\right)$

Exercice n°7

Parmi les valeurs suivantes, lesquelles donnent le même point image sur le cercle trigonométrique ?

$$\frac{13\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}$$

Exercice n°8

Sans calculatrice, dire si les égalités suivantes sont vraies :

1. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5$
2. $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1{,}3$
3. $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = -0{,}3$

Exercice n°9

Dans chaque cas, donner toutes les valeurs possibles du sinus ou du cosinus associé.

1. $\cos(x) = 0{,}36$
2. $\sin(x) = \frac{4}{5}$
3. $\cos(x) = 0{,}7$
4. $\sin(x) = 0{,}25$

Exercice n°10

Sans calculatrice calculez $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$.

Exercice n°11

Déterminer une valeur du réel x dans chacun des cas suivants :

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) = 1/2$;
2. $\cos(x) = 1$ et $\sin(x) = 0$;
3. $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice n°12

Soit x un réel tel que $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminez toutes les valeurs de $3x$.
2. En déduire toutes les valeurs possibles pour x.
3. En déduire les solutions de l'équation $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$.

Exercice n°13

Sans recopier du cours, en utilisant des croquis du cercle trigonométrique, complétez avec $\cos(x)$; $\sin(x)$; $-\cos(x)$; $-\sin(x)$:

1. $\cos(-x) =$
2. $\sin(-x) =$
3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$
5. $\cos(\pi - x) =$
6. $\cos(\pi + x) =$
7. $\sin(\pi + x) =$
8. $\sin(\pi - x) =$
9. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$
10. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

Exercice n°14

1. Résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Résoudre la même équation que précédemment dans $[-\pi;3\pi]$.

Exercice n°15

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Résoudre la même équation dans $]-\pi;\pi]$.

Exercice n°16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
3. $2 \times \cos^2(x) + \sqrt{3} \times \cos(x) - 3 = 0$

Exercice n°17

Le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct $(O;I;J)$ du plan. Le point M appartient au cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$.

1. Faire une figure.
2. Quelles sont les coordonnées du points M dans le repère $(O;I;J)$?
3. Calculer la distance IM.
4. Puis :
   a. Démontrer que $IM = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
   b. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
5. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
6. Déduire les valeurs exactes des cosinus et des sinus des angles suivants : $\frac{7\pi}{8}$; $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$.

Exercice n°18

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct $(O;I;J)$. M est le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6}$.

1. Faire une figure.

2. Quelles sont les coordonnées du point M ?
3. Calculer la distance IM.
4. Puis :
   a. Démontrer que $IM = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   b. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   c. Montrer qu'on peut mettre $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sous la forme $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
5. Enfin :
   a. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   b. Montrer qu'on peut mettre $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sous la forme $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
6. En déduire les valeurs exactes des cosinus et des sinus des angles suivants : $\frac{11\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}$.

Exercice n°19

Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(3x)$
2. $-2\cos(x)$
3. $7x sin(4x)$
4. $3\cos(x) + 1$

Exercice n°20

Montrer que les fonctions suivantes sont 2π-périodiques :

1. $f(x) = \sin(x) + 1$
2. $f(x) = -2\cos(x) + 1$
3. $f(x) = \sin^2(x) + 1$
4. $\cos^2(x) + 2\sin(x) + 1$

Exercice n°21

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + x^2$.

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f.

Exercice n°22

On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + \sin(x)$.

1. Montrer que g est une fonction impaire.
2. Que peut-on en déduire sur sa courbe représentative ?

Exercice n°23

Calculer les dérivées des fonctions défnies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$
2. $f(x) = \cos(x)\sin(x)$
3. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$; $x \in \mathbb{R}^*$

Exercice n°24

Calculer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = \cos(3x - 5)$
2. $\sin(2x)$
3. $h(x) = \frac{\cos(x-3)}{3}$

Exercice n°25

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(-2x + 1) \times \sin(3x - 4)$.

Exercice n°26

Dresser le tableau de signes puis le tableau de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $[\pi; 3\pi]$.

Exercice n°27

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{\cos(x)-1}$
2. $g(x) = \sqrt{\sin(x)}$

Exercice n°28

Donner une fonction ayant pour dérivée les fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f'(x) = \sin(x)$

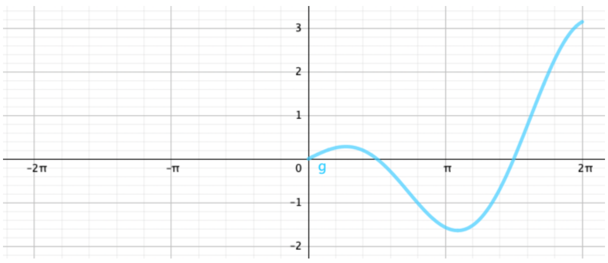
2. $f'(x) = -4\sin(2x - 4)$
3. $f'(x) = 3\cos(3x - 2)$

Exercice n°29

Sachant que f est une fonction paire, recopiez et complétez le graphe ci-dessous à main levée sur $[-2\pi; 2\pi]$.

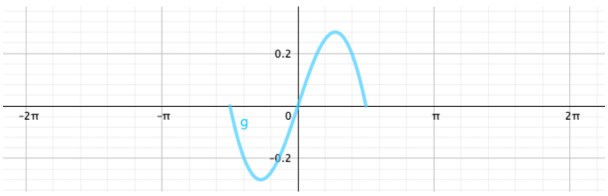
Exercice n°30

Sachant que f est une fonction impaire, recopiez et complétez le graphe ci-dessous à main levée sur $[-2\pi; 2\pi]$.



Exercice n°31

Sachant que la fonction h est une fonction π-périodique, recopiez et complétez le graphe ci-dessous à main levée sur $[-2\pi; 2\pi]$.

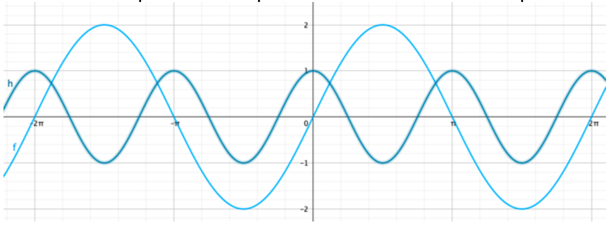


Exercice n°32

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \cos(2x)$. La fonction f est-elle périodique ? Si oui, préciser sa période en justifiant votre réponse.

Exercice n°33

Donner à chaque courbe représentative la fonction qui correspond. Justifiez la réponse.



1. $f(x) = 2\sin(x)$
2. $\cos(2x)$

Exercice n°34

On considère la fonction $f(x) = \sin(4x - 1)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. La dérivée seconde de f est la dérivée de f', notée f''. Démontrez que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = -16\sin(4x - 1)$.

Exercice n°35

On considère la fonction $f(x) = 4\cos(x) + (\cos(x))^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifiez que f est dérivable et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2\sin(x) \times (2 + \cos(x))$.
2. En déduire les variations de f sur $[0; 2\pi]$.

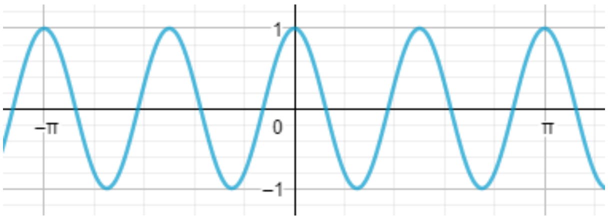
Exercice n°36

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x}{2} + \sin(x)$.

1. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Donner le tableau de variation de h sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
3. Pourquoi peut-on connaître alors les variations de h sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice n°37

En physique, les oscillations harmoniques (pendules, ressorts, ondes, etc.) sont décrites par des fonctions de la forme $\cos(\omega t + \phi)$ ou $\sin(\omega t + \phi)$ où ω est appelé pulsation et ϕ la phase.



1. La courbe ci-dessus représente l'oscillation de la fonction $f(t) = \cos(4t)$. Déterminer par lecture graphique la période T de ce signal. Vérifier ce résultat à l'aide d'un calcul.
2. Conjecturer une formule reliant la pulsation ω et la période T.
3. Tester cette conjecture sur les oscillations suivantes :
   a. $g(t) = \cos(6t + 2)$
   b. $h(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$
4. Démontrer la conjecture.

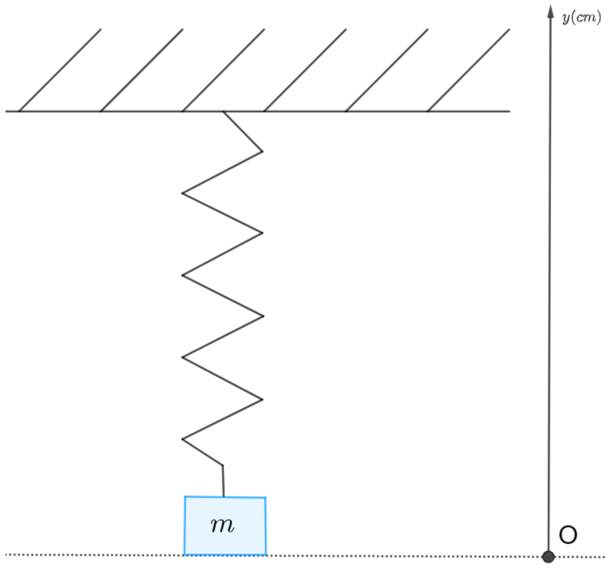
Exercice n°38

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

1. Pourquoi peut-on restreindre l'étude de cette fonction à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
2. Calculer la dérivée de la fonction f.
3. Résoudre l'inéquation $\cos(x) > \sin(x)$ sur $[-\pi; \pi]$.
4. En déduire le tableau de variation de f.
5. Déterminer la valeur maximale que peut prendre f.

Exercice n°39

On suspend une masse m à un ressort. On note y la hauteur relative de la masse. La valeur $y = 0$ correspond à l'équilibre lorsque la masse est immobile. On amène la masse à $10\,cm$ de hauteur puis on la lâche. On suppose qu'il n'y a pas d'amortissement des oscillations. Les oscillations pour $t \geq 0$ (t en seconde) sont données par $y(t) = 10\cos(3t)$. On remarque qu'au temps $t_0 = 0$, on a $y(t_0) = 10$.



1. Pour quel temps t_1 la masse va passer pour la première fois par sa position d'équilibre $y = 0$?
2. Pour quel temps t_2 la masse va repasser pour la deuxième fois par sa position d'équilibre ?
3. Quelle est la période des oscillations de la masse ?
4. Quelle sera la hauteur maximale de la masse ? et la hauteur minimale ?

Exercice n°40

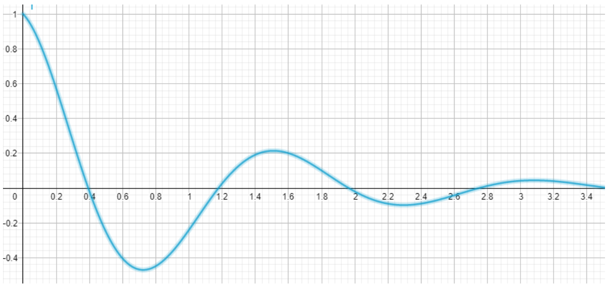
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{2+\cos(x)}$.

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f est 2π - périodique.
3. En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction f.
4. Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0; \pi]$.
5. Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi; 3\pi]$.

Exercice n°41

Soit les fonctions f et g définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} \times \cos(4x)$ et $g(x) = e^{-x}$. On a tracé

$\mathcal{C}_f$ ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f.



1. Montrer que

$$\forall x \in [0; +\infty[, -e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

2. Que peut-on conjecturer pour les grandes valeurs de x ?
3. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
4. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Précisez-en la raison.
   b. En déduire le sens de variation de la suite u_n et étudier sa convergence.
5. Montrer que
   a. $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = -e^{-x} \times [\cos(4x) + 4\sin(4x)]$
   b. En déduire que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont la même tangente en chacun de leurs points communs.
6. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite (T) tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Compléter le graphique ci-dessous en y traçant (T) et $\mathcal{C}_g$.

Exercice n°42

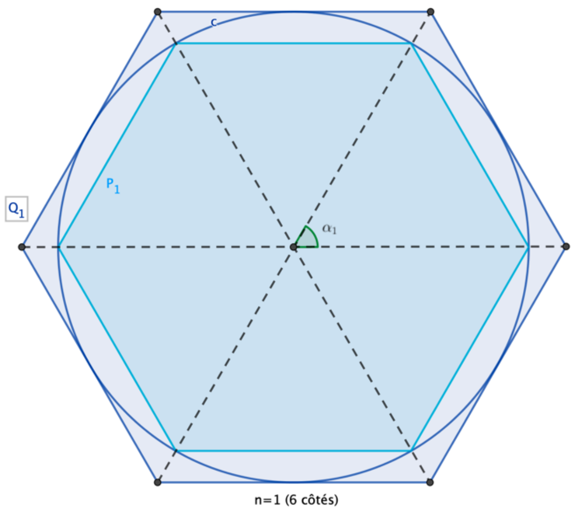
Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan(x)$. On rappelle que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Déterminez l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Montrer que la fonction tangente est impaire.
3. Montrer que la fonction tangente est π-périodique.
4. En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction tangente.
5. Déterminez deux expressions simplifiées de la dérivée de la fonction f, i.e. de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
6. Dresser le tableau de variation de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
7. Calculer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 notée T_0.

Exercice n° 43

Approximation de π par la méthode d'Archimède. Dans un texte intitulé « De la mesure du cercle », Archimède imagine la première méthode jamais proposée permettant, en théorie, le calcul de π avec une précision aussi grande qu'on le souhaite.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1 : on construit, pour $n \geq 1$ deux polygones réguliers P_n et Q_n, ayant 3×2^n côtés, P_n étant inscrit dans $\mathcal{C}$, et Q_n étant exinscrit à $\mathcal{C}$ (voir la figure ci-dessous).



Le périmètre du cercle est encadré par ces deux polygones. On note p_n et q_n les demi périmètres respectifs de P_n et Q_n. Ainsi :

$$p_n \leq \pi \leq q_n$$

1. Le cas $n = 1$. Montrez que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$.
2. Expression de p_n et q_n.
    a. Évaluez l'angle au centre α_n qui intercepte l'un des côtés de P_n en fonction de n.
    b. En déduire les relations :
        i. $p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$
        ii. $q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$

En pratique, ces expressions ne permettent pas un calcul numérique de p_n et de q_n. Dans la suite, nous nous orienterons vers un calcul de proche en proche.

3. Relations de récurrence.
    a. On $\beta_n = \frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}$. Exprimez p_n et q_n en fonction de n et β_n.
    b. On admet que $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ et $1 + \cos(2a) = 2\cos^2(a)$. En déduire que :

    - $\forall n \geq 1, \frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}\right)$;
    - $p_{n+1} = \frac{1}{2} \times \sqrt{p_n q_{n+1}}$.

    c. Calculer q_2 et p_2 à l'aide des relations précédentes. Quelle est alors la précision sur la valeur approchée de π.