23/03/23.

1ère - Trigo -

n°40.

Exercice n°40

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{2+\cos(x)}$.

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f est 2π-périodique.
3. En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction f.
4. Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0;\pi]$.
5. Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi;\pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi;3\pi]$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

$-1+2 \leq \cos(x)+2 \leq 1+2$.

$0 < 1 \leq \cos(x)+2 \leq 3$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)+2 \neq 0$. Il n'y a donc pas de problème de définition.

$D_f = \mathbb{R}$.

2. Pour prouver que f est 2π-périodique, on doit prouver que $f[x+2\pi] = f(x)$.

$$f(x+2\pi) = \frac{2}{\cos(x+2\pi)+2} = \frac{2}{\cos(x)+2} = f(x).$$

f est 2π périodique.

3) Montrons que f est paire :

$$f(-x) = \frac{2}{\cos(-x)+2} = \frac{2}{\cos(x)+2} = f(x).$$

f est paire.

Comme f est 2π périodique et paire on peut réduire l'ensemble de définition à l'intervalle $[0;\pi]$.

4. Soit $x \in [0;\pi]$. f est définie et dérivable sur $[0;\pi]$.

$$f(x) = \frac{1}{u(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-u'(x)}{u^2(x)}$$

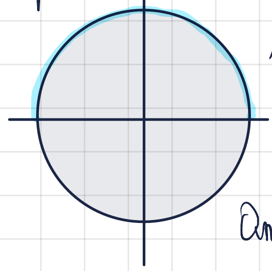
$$f(x) = \frac{2}{2+\cos(x)} = 2 \times \frac{1}{2+\cos(x)}$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{-x(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2\sin(x)}{(2+\cos(x))^2}}$$

Déterminons le signe de $f'(x)$ sur $[0;\pi]$.

$\forall x \in [0;\pi]$, $(2+\cos(x))^2 > 0$. Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $2\sin(x)$. D'après le cercle trigonométrique, $\forall x \in [0;\pi]$, $\sin(x) \geq 0$.



On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$:

x	0		π
$f'(x)$		$+$	

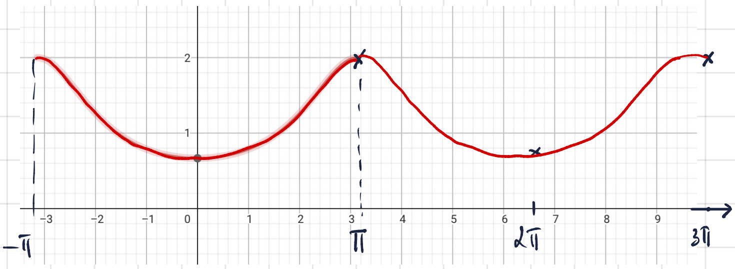
5.

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$		$-$	|	$+$	
f	2	↘		↗	2

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{2}{2+\cos(\pi)} = \frac{2}{2+(-1)}$$

$$= \frac{2}{1} = 2$$

$$f(0) = \frac{2}{2+\cos(0)} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$



Application : Soit $(O;I;J)$ un repère orthonormé.

Soit $A(2;3)$. $B(3;1)$ $C(4;8)$.

Déterminez les coordonnées de D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$$\vec{BA}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} = \vec{BA}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$$

$= \vec{CD}\begin{pmatrix} x_D - 4 \\ y_D - 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_D - 4 = -1 \\ y_D - 8 = 2 \end{cases}$$

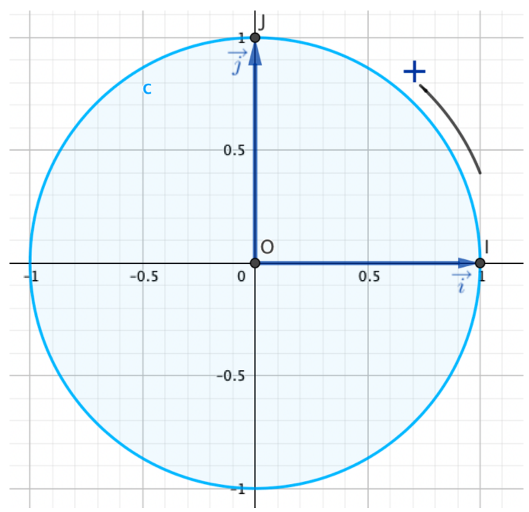
$$\begin{cases} x_D = -1+4 = 3. \\ y_D = 2+8 = 10. \end{cases}$$

Trigonométrie et fonctions trigonométriques

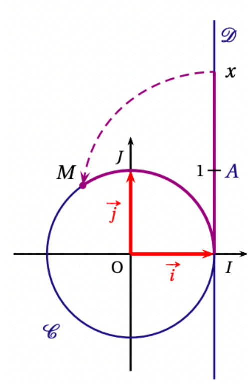
I. Une nouvelle unité de mesure des angles

1. Le cercle trigonométrique

Définition : Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O (l'origine du repère) et de rayon 1. Le cercle est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre aussi appelé le sens direct ou bien sens trigonométrique.



2. Enroulement de la droite numérique



On construit une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par le point I. Nous graduons cette droite de la manière ci-contre. Enfin nous enroulons la droite $\mathcal{D}$ autour du cercle trigonométrique. Cette action va faire correspondre tous les points de la droite $\mathcal{D}$ à un unique point sur le cercle trigonométrique.

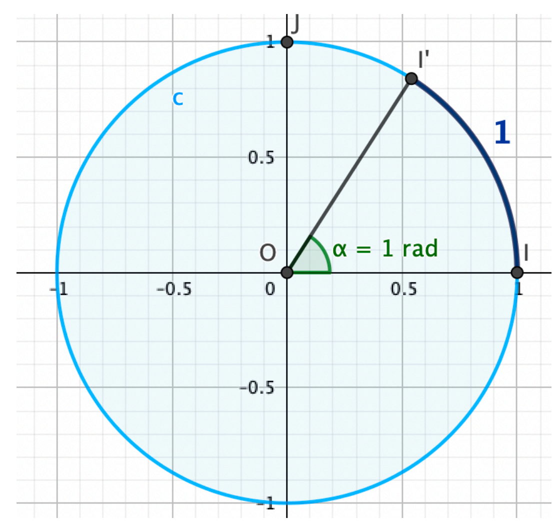
Définition : A chaque abscisse x de la droite $\mathcal{D}$, on associe un unique point sur le cercle trigonométrique appelé « le point image ».

Propriété (dém trivale) : Deux nombres réels x et x' sur la droite $\mathcal{D}$ ont le même point image sur le cercle trigonométrique si et seulement s'ils sont tels que :

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z}, x - x' = k \times 2\pi}$$

2. Angle en radian

Définition : Soit le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. On considère une unité de radian est l'angle dont le sommet est l'origine O du repère et qui intercepte le cercle $\mathcal{C}$ sur un arc de longueur 1.



En conséquence, on a les égalités suivantes :

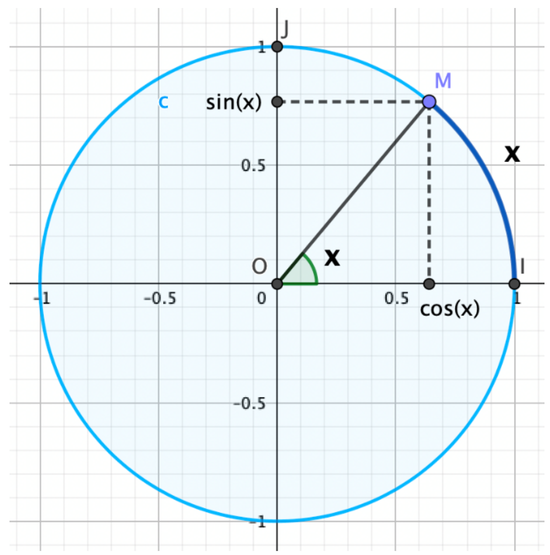
- $180° = \pi\, rad$;
- $360° = 2\pi\, rad$;
- La mesure d'un angle en radians et en degrés sont proportionnelles.

II. Cosinus et sinus d'un angle

1. Quelques généralités

Définition : On considère un réel x sur la droite $\mathcal{D}$ qui a pour image le point M sur le cercle trigonométrique. Dans ces conditions, on a :

- $\cos(x) = x_M$: le cosinus de x est l'abscisse du point M.
- $\sin(x) = y_M$: le sinus de x est l'ordonnée du point M.



Propriété (dém en TD exo n°1) : Pour tout nombre réel x, on a :

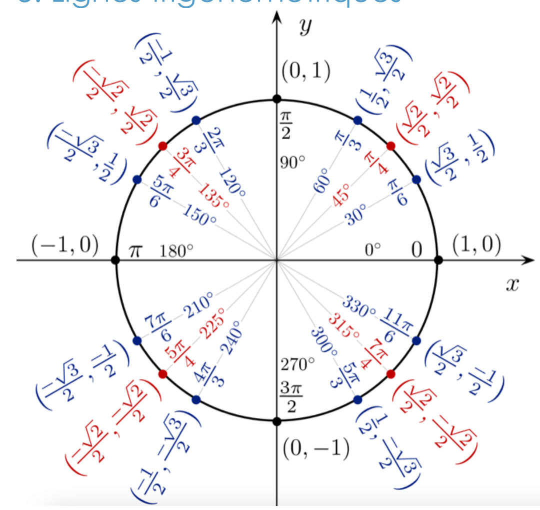
$$\begin{cases} -1 \leq cos(x) \leq 1 \\ -1 \leq sin(x) \leq 1 \\ cos^2(x) + sin^2(x) = 1 \end{cases}$$

2. Valeurs remarquables

Voici le tableau de valeurs des cosinus et des sinus d'angles remarquables à connaître par cœur (**dém en TD exo n°3**)

Angles	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3. Lignes trigonométriques

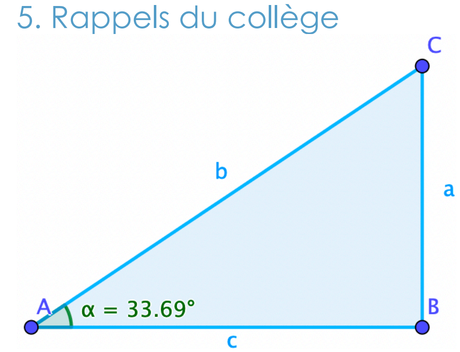


4. Angles associés

Propriétés : Pour tout réel x, on a :

- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $cos(\pi - x) = -cos(x)$
- $sin(\pi + x) = -sin(x)$
- $cos(\pi + x) = -cos(x)$
- $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos(x)$
- $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin(x)$
- $sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos(x)$
- $cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sin(x)$

5. Rappels du collège



Dans un triangle rectangle, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} cos(\hat{A}) = \dfrac{côté\ adjacent}{hypoténuse} = \dfrac{c}{b} \\ sin(\hat{A}) = \dfrac{côté\ opposé}{hypoténuse} = \dfrac{a}{b} \\ tan(\hat{A}) = \dfrac{côté\ opposé}{adjacent} = \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

6. Équations trigonométriques

Voici une méthode générale pour résoudre les équations trigonométriques.

1. Équations du style $\cos(x) = a$

a) On vérifie si $a \notin [-1;1]$, alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Alors $S = \emptyset$.

b) Si $a \in [-1;1]$, on trouve grâce aux angles remarquables dans le cercle trigonométrique, un angle α tel que : $\cos(\alpha) = a$.

c) Les solutions de l'équation sont alors toutes valeurs suivantes :

$$\begin{cases} x = \alpha + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\alpha + k' \times 2\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Équations du style $\sin(x) = a$

a) De même, si $a \notin [-1;1]$, alors l'équation n'admet pas de solutions réelles. Alors $S = \emptyset$.

b) Si $a \in [-1;1]$, on trouve grâce aux angles remarquables dans le cercle trigonométrique un angle α tel que : $\sin(\alpha) = a$.

c) Les solutions de l'équation sont alors toutes les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} x = \alpha + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \alpha + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

III. Fonctions trigonométriques

1. Fonction cosinus et sinus

Définition : on a :

- La fonction cosinus est la fonction qui à tout réel x, associe $\cos(x)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

- La fonction sinus est la fonction qui à tout réel x, associe $\sin(x)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

Propriété (dém en TD exo n°2) : La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

Propriété (dém triviale) : Les fonctions sinus et cosinus sont $2\pi -$périodiques. Autrement dit, pour tout réel x, on a :

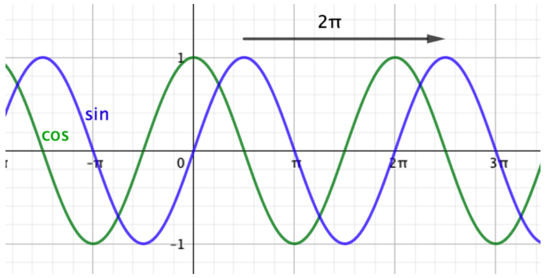
- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$

2. Courbes représentatives

Définition : Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont des sinusoïdes.

Propriétés : On a les propriétés suivantes :

- Les fonctions sinus et cosinus étant $2\pi -$ périodiques, les courbes représentatives sont identiques par la translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.
- La fonction cosinus étant paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction sinus étant impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère O.



3. Étude des fonctions trigonométriques

Propriété (admise) : Si f est la fonction cosinus et g la fonction sinus, alors f et g sont dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $f'(x) = -\sin(x)$;
- $g'(x) = \cos(x)$.

Propriété : Soient a et b deux réels quelconques. En notant $f : x \longmapsto \cos(u(x))$ et $g : x \longmapsto \sin(u(x))$, alors f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :

- $f'(x) = -u'(x) \times \sin(u(x))$;
- $g'(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$.

III. Exercices

Exercice n°1

1. Dessiner le cercle trigonométrique.
2. Placer sur le cercle trigonométrique le point image M correspondant à un réel $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Tracer la perpendiculaire à (Ox) et à (Oy) passant par M et, placez $\cos(x)$ et $\sin(x)$ correspondant respectivement aux points N et P.
4. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$.
5. Quelle est la nature du triangle OMN ?
6. Quelle est l'expression de ON ? Et de MN ?
7. Démontrez alors que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Exercice n°2

1. Rappeler la définition d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. En vous basant sur les définitions mentionnées, démontrer que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.

Exercice n°3

1. Sur le cercle trigonométrique, placer le point A correspondant à la valeur $\frac{\pi}{6}$.
2. Placer les points A_1, A_2, A_3 associés aux réels $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{9\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$.
3. Rappelez le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{6}$.
4. Par des considérations géométriques, déterminez le cosinus et le sinus des angles $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{9\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice n°4

Donner la valeur exacte en radian de tous les angles d'un triangle :

1. Rectangle isocèle ;
2. Équilatéral.

Exercice n°5

Dessine le cercle trigonométrique. Placez-y les points représentatifs des réels suivants :

1. $\frac{2\pi}{3}$
2. $-\frac{3\pi}{4}$
3. $\frac{17\pi}{6}$
4. $\frac{5\pi}{2}$

Exercice n°6

1. En utilisant les angles associés, exprimez les expressions suivantes en fonctions de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:
   a. $A = \sin(x + \pi) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x) - \sin(-x)$
   b. $B = \cos(x) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(x - \pi) + \cos(\pi - x)$
2. Calculez les expressions suivantes en utilisant les angles associés :
   a. $C = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{23\pi}{14}\right)$
   b. $D = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{5}\right)$

Exercice n°7

Parmi les valeurs suivantes, lesquelles donnent le même point image sur le cercle trigonométrique ?

$$\frac{13\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}$$

Exercice n°8

Sans calculatrice, dire si les égalités suivantes sont vraies :

1. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5$
2. $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1{,}3$
3. $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = -0{,}3$

Exercice n°9

Dans chaque cas, donner toutes les valeurs possibles du sinus ou du cosinus associé.

1. $\cos(x) = 0{,}36$
2. $\sin(x) = \frac{4}{5}$
3. $\cos(x) = 0{,}7$
4. $\sin(x) = 0{,}25$

Exercice n°10

Sans calculatrice calculez $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$.

Exercice n°11

Déterminer une valeur du réel x dans chacun des cas suivants :

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) = 1/2$;
2. $\cos(x) = 1$ et $\sin(x) = 0$;
3. $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice n°12

Soit x un réel tel que $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminez toutes les valeurs de $3x$.
2. En déduire toutes les valeurs possibles pour x.
3. En déduire les solutions de l'équation $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$.

Exercice n°13

Sans recopier du cours, en utilisant des croquis du cercle trigonométrique, complétez avec $\cos(x)$; $\sin(x)$; $-\cos(x)$; $-\sin(x)$:

1. $\cos(-x) =$
2. $\sin(-x) =$
3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$
5. $\cos(\pi - x) =$
6. $\cos(\pi + x) =$
7. $\sin(\pi + x) =$
8. $\sin(\pi - x) =$
9. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$
10. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

Exercice n°14

1. Résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Résoudre la même équation que précédemment dans $[-\pi; 3\pi]$.

Exercice n°15

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Résoudre la même équation dans $]-\pi;\pi]$.

Exercice n°16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
3. $2 \times \cos^2(x) + \sqrt{3} \times \cos(x) - 3 = 0$

Exercice n°17

Le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct $(O; I; J)$ du plan. Le point M appartient au cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$.

1. Faire une figure.
2. Quelles sont les coordonnées du points M dans le repère $(O; I; J)$?
3. Calculer la distance IM.
4. Puis :
   a. Démontrer que $IM = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
   b. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
5. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
6. Déduire les valeurs exactes des cosinus et des sinus des angles suivants : $\frac{7\pi}{8}$; $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$.

Exercice n°18

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct $(O; I; J)$. M est le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6}$.

1. Faire une figure.

2. Quelles sont les coordonnées du point M ?
3. Calculer la distance IM.
4. Puis :
    a. Démontrer que $IM = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
    b. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
    c. Montrer qu'on peut mettre $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sous la forme $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
5. Enfin :
    a. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
    b. Montrer qu'on peut mettre $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sous la forme $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
6. En déduire les valeurs exactes des cosinus et des sinus des angles suivants : $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$.

Exercice n°19

Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(3x)$
2. $-2\cos(x)$
3. $7x sin(4x)$
4. $3\cos(x) + 1$

Exercice n°20

Montrer que les fonctions suivantes sont 2π-périodiques :

1. $f(x) = \sin(x) + 1$
2. $f(x) = -2\cos(x) + 1$
3. $f(x) = \sin^2(x) + 1$
4. $\cos^2(x) + 2\sin(x) + 1$

Exercice n°21

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + x^2$.

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f.

Exercice n°22

On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + \sin(x)$.

1. Montrer que g est une fonction impaire.
2. Que peut-on en déduire sur sa courbe représentative ?

Exercice n°23

Calculer les dérivées des fonctions défnies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$
2. $f(x) = \cos(x)\sin(x)$
3. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$; $x \in \mathbb{R}^*$

Exercice n°24

Calculer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = \cos(3x - 5)$
2. $\sin(2x)$
3. $h(x) = \frac{\cos(x-3)}{3}$

Exercice n°25

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(-2x + 1) \times \sin(3x - 4)$.

Exercice n°26

Dresser le tableau de signes puis le tableau de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $[\pi; 3\pi]$.

Exercice n°27

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{\cos(x)-1}$
2. $g(x) = \sqrt{\sin(x)}$

Exercice n°28

Donner une fonction ayant pour dérivée les fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f'(x) = \sin(x)$

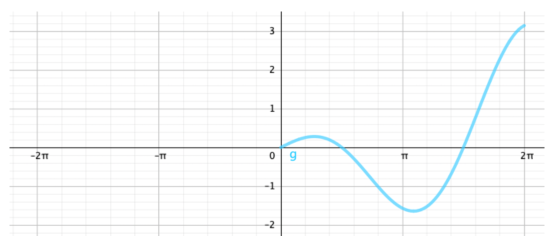
2. $f'(x) = -4\sin(2x-4)$
3. $f'(x) = 3\cos(3x-2)$

Exercice n°29

Sachant que f est une fonction paire, recopiez et complétez le graphe ci-dessous à main levée sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice n°30

Sachant que f est une fonction impaire, recopiez et complétez le graphe ci-dessous à main levée sur $[-2\pi; 2\pi]$.



Exercice n°31

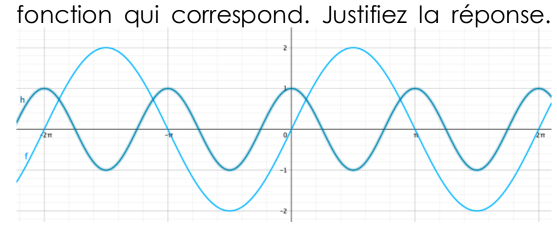
Sachant que la fonction h est une fonction π-périodique, recopiez et complétez le graphe ci-dessous à main levée sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice n°32

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \cos(2x)$. La fonction f est-elle périodique ? Si oui, préciser sa période en justifiant votre réponse.

Exercice n°33

Donner à chaque courbe représentative la fonction qui correspond. Justifiez la réponse.



1. $f(x) = 2\sin(x)$ 2. $\cos(2x)$

Exercice n°34

On considère la fonction $f(x) = \sin(4x-1)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. La dérivée seconde de f est la dérivée de f', notée f''. Démontrez que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = -16\sin(4x-1)$.

Exercice n°35

On considère la fonction $f(x) = 4\cos(x) + (\cos(x))^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifiez que f est dérivable et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2\sin(x) \times (2+\cos(x))$.
2. En déduire les variations de f sur $[0; 2\pi]$.

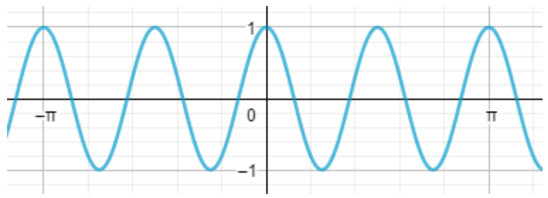
Exercice n°36

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x}{2} + \sin(x)$.

1. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Donner le tableau de variation de h sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
3. Pourquoi peut-on connaître alors les variations de h sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice n°37

En physique, les oscillations harmoniques (pendules, ressorts, ondes, etc.) sont décrites par des fonctions de la forme $\cos(\omega t + \phi)$ ou $\sin(\omega t + \phi)$ où ω est appelé pulsation et ϕ la phase.



1. La courbe ci-dessus représente l'oscillation de la fonction $f(t) = \cos(4t)$. Déterminer par lecture graphique la période T de ce signal. Vérifier ce résultat à l'aide d'un calcul.
2. Conjecturer une formule reliant la pulsation ω et la période T.
3. Tester cette conjecture sur les oscillations suivantes :
   a. $g(t) = \cos(6t + 2)$
   b. $h(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$
4. Démontrer la conjecture.

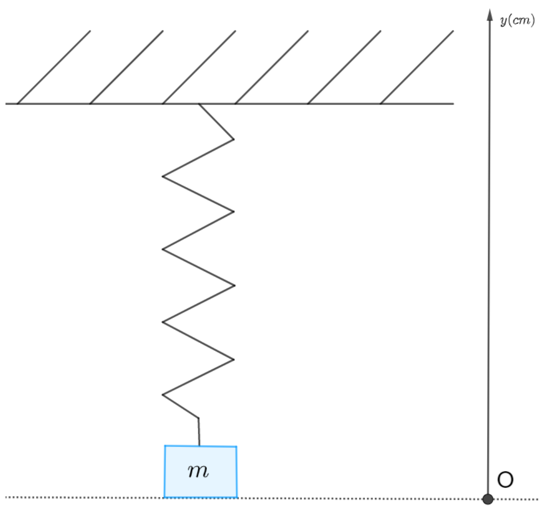
Exercice n°38

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

1. Pourquoi peut-on restreindre l'étude de cette fonction à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
2. Calculer la dérivée de la fonction f.
3. Résoudre l'inéquation $\cos(x) > \sin(x)$ sur $[-\pi; \pi]$.
4. En déduire le tableau de variation de f.
5. Déterminer la valeur maximale que peut prendre f.

Exercice n°39

On suspend une masse m à un ressort. On note y la hauteur relative de la masse. La valeur $y = 0$ correspond à l'équilibre lorsque la masse est immobile. On amène la masse à $10\,cm$ de hauteur puis on la lâche. On suppose qu'il n'y a pas d'amortissement des oscillations. Les oscillations pour $t \geq 0$ (t en seconde) sont données par $y(t) = 10\cos(3t)$. On remarque qu'au temps $t_0 = 0$, on a $y(t_0) = 10$.



1. Pour quel temps t_1 la masse va passer pour la première fois par sa position d'équilibre $y = 0$?
2. Pour quel temps t_2 la masse va repasser pour la deuxième fois par sa position d'équilibre ?
3. Quelle est la période des oscillations de la masse ?
4. Quelle sera la hauteur maximale de la masse ? et la hauteur minimale ?

Exercice n°40

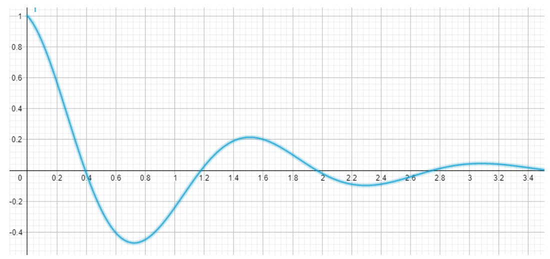
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{2+\cos(x)}$.

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f est 2π-périodique.
3. En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction f.
4. Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0; \pi]$.
5. Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi; 3\pi]$.

Exercice n°41

Soit les fonctions f et g définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} \times \cos(4x)$ et $g(x) = e^{-x}$. On a tracé

$\mathcal{C}_f$ ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f.



1. Montrer que

   $\forall x \in [0;+\infty[, -e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

2. Que peut-on conjecturer pour les grandes valeurs de x ?
3. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
4. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Précisez-en la raison.
   b. En déduire le sens de variation de la suite u_n et étudier sa convergence.
5. Montrer que
   a. $\forall x \in [0;+\infty[, f'(x) = -e^{-x} \times [\cos(4x) + 4\sin(4x)]$
   b. En déduire que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont la même tangente en chacun de leurs points communs.
6. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite (T) tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Compléter le graphique ci-dessous en y traçant (T) et $\mathcal{C}_g$.

Exercice n°42

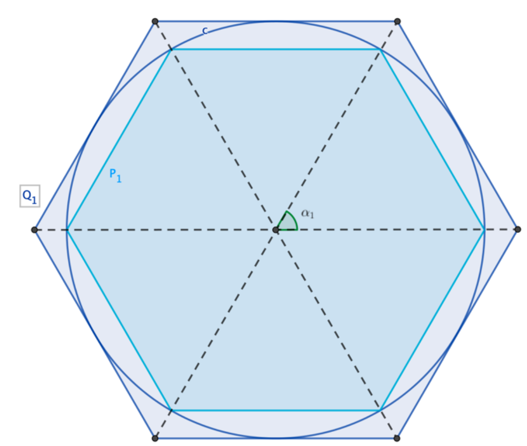
Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan(x)$. On rappelle que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Déterminez l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Montrer que la fonction tangente est impaire.
3. Montrer que la fonction tangente est π-périodique.
4. En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction tangente.
5. Déterminez deux expressions simplifiées de la dérivée de la fonction f, i.e. de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
6. Dresser le tableau de variation de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
7. Calculer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 notée T_0.

Exercice n° 43

Approximation de π par la méthode d'Archimède. Dans un texte intitulé « De la mesure du cercle », Archimède imagine la première méthode jamais proposée permettant, en théorie, le calcul de π avec une précision aussi grande qu'on le souhaite.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1 : on construit, pour $n \geq 1$ deux polygones réguliers P_n et Q_n, ayant 3×2^n côtés, P_n étant inscrit dans $\mathcal{C}$, et Q_n étant exinscrit à $\mathcal{C}$ (voir la figure ci-dessous).



n=1 (6 côtés)

Le périmètre du cercle est encadré par ces deux polygones. On note p_n et q_n les demi périmètres respectifs de P_n et Q_n. Ainsi :

$$p_n \leq \pi \leq q_n$$

1. Le cas $n = 1$. Montrez que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$.
2. Expression de p_n et q_n.
   a. Évaluez l'angle au centre α_n qui intercepte l'un des côtés de P_n en fonction de n.
   b. En déduire les relations :
      i. $p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$
      ii. $q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$

En pratique, ces expressions ne permettent pas un calcul numérique de p_n et de q_n. Dans la suite, nous nous orienterons vers un calcul de proche en proche.

3. Relations de récurrence.
   a. On $\beta_n = \frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}$. Exprimez p_n et q_n en fonction de n et β_n.
   b. On admet que $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ et $1 + \cos(2a) = 2\cos^2(a)$. En déduire que :
   - $\forall n \geq 1, \frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}\right)$;
   - $p_{n+1} = \frac{1}{2} \times \sqrt{p_n q_{n+1}}$.

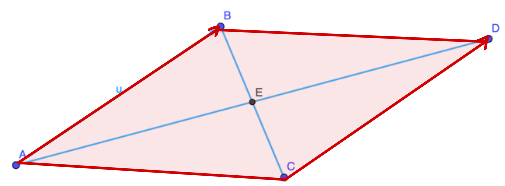
   c. Calculer q_2 et p_2 à l'aide des relations précédentes. Quelle est alors la précision sur la valeur approchée de π.

Le produit scalaire

I. Rappels sur les vecteurs

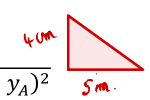
1. Définitions

Définition : Soient A et B deux points distincts du plan. La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation du plan qui associe à tout point C un unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ aient le même milieu.



Définitions : Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa norme (longueur AB), sa direction (inclinaison de la droite (AB)) et son sens (de A vers B). Il définit la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transformant A en B. On rappelle que dans un repère orthonormé :

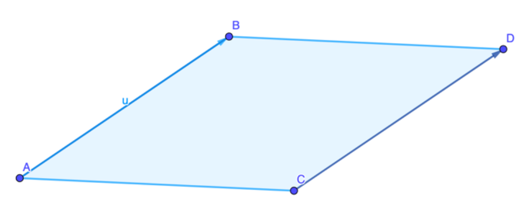
$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



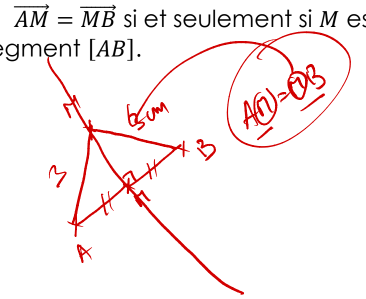
Le point A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point B est appelé l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Définition : L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que les deux vecteurs ont la même direction, le même sens et la même norme.

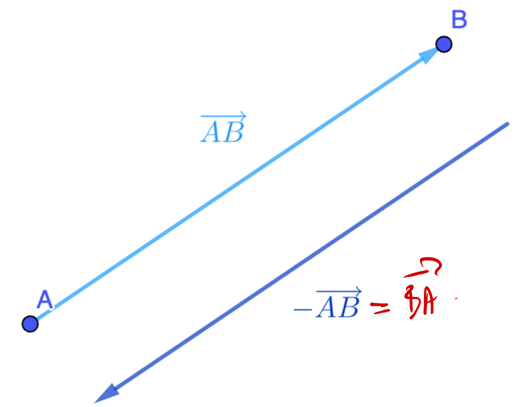
Propriété : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.



Propriété : Pour tous les points A et B du plan, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ si et seulement si M est le milieu du segment $[AB]$.

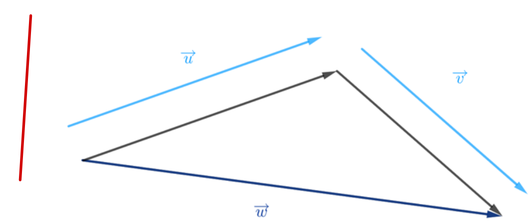


Définition : L'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $-\overrightarrow{AB}$ tel que $\overrightarrow{AB}$ et $-\overrightarrow{AB}$ ont la même direction, la même norme mais de sens opposé.



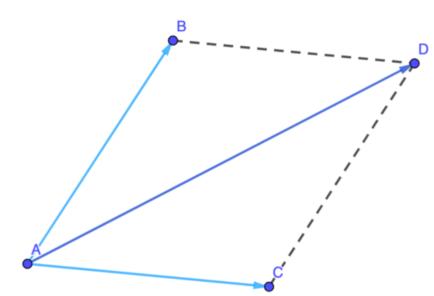
2. Somme de vecteurs

Définition : La somme d'un vecteur $\vec{u}$ et d'un vecteur $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



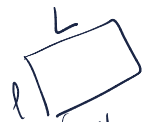
Propriété : Pour tout point A, B, C et D, on a :

- La relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$;
- La propriété du parallélogramme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ si et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.



Propriété : On admet que pour trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

2+3
3+2



2×l+4

- Commutativité : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- Associativité : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$;
- Bilinéarité :
    - $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$;
    - $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$;

3. Colinéarité de deux vecteurs

Définition : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que

$$\boxed{\vec{u} = k \times \vec{v}}$$

On pourra alors dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction ou bien des directions parallèles.

Propriété : $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaire si et seulement si :

$$\boxed{det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y = 0}$$

Propriété : La colinéarité permet non seulement de montrer l'alignement mais aussi le parallélisme :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\Leftrightarrow (AB) \parallel (CD)$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow A, B, C$ alignés

4. Géométrie analytique

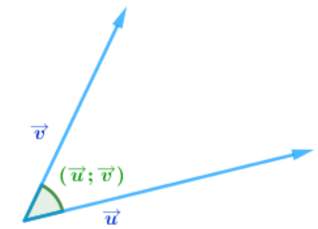
Propriété : On considère les points et vecteurs suivants : $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$; $\vec{u}(x; y)$; $\vec{v}(x'; y')$. Dans un repère orthonormé on a les relations suivantes :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$;
- Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :
    - $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

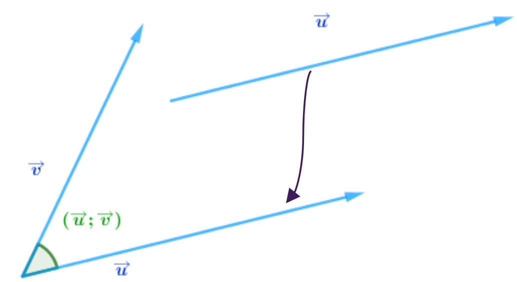
II. Les angles orientés de vecteurs et leurs propriétés

1. Définition

Définition : Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Alors l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ est l'angle défini de la manière suivante :



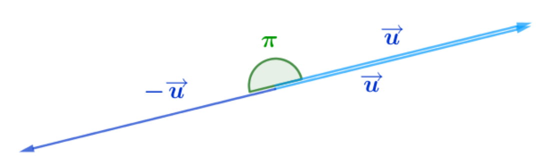
Remarque : Lorsque les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même origine, il suffit de construire le représentant de $\vec{u}$ ayant pour origine celle de $\vec{v}$.



2. Propriétés sur les angles orientés

Propriété : On a :

- $(\vec{u}; \vec{u}) = 0$
- $(u; -\vec{u}) = \pi$



Conséquence : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$\boxed{(\vec{u};\vec{v}) = k \times \pi, k \in \mathbb{Z}}$$

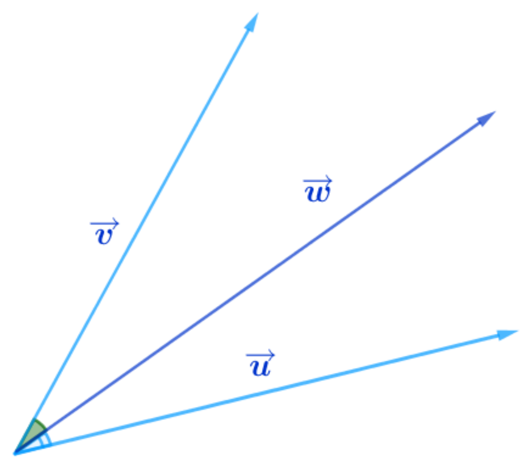
Propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors, on a les relations suivantes :

- $(\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};\vec{v})$;
- $(\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi$;
- $(-\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi$;
- $(-\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})$

3. Relation de Chasles

Théorème : Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, on a :

$$\boxed{(\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{w}) + (\vec{w};\vec{u})}$$



III. Le produit scalaire

1. Définition

Définition : On appelle produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan l'unique réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, tel que :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos\ (\vec{u};\vec{v})}$$

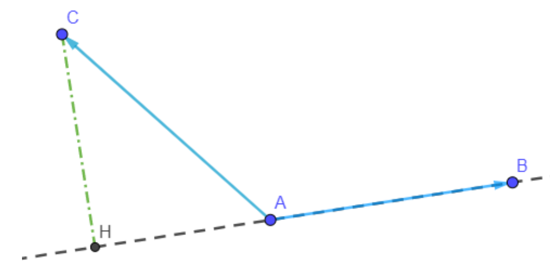
2. Le projeté orthogonal

Définition : Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non nuls. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}$$

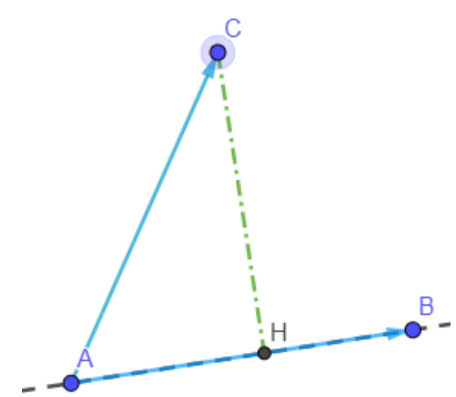
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire, alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$



Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$



3. Propriétés du produit scalaire

Propriétés : Le produit scolaire est commutatif et bilinéaire :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- $a\vec{u} \cdot b\vec{v} = ab \times \vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriétés : On a les trois propriétés suivantes :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire.

Et, fondamentalement, on a :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}}$$

3. Définition avec la norme

Définition : on peut également définir le produit scalaire de la manière suivante :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)}$$

Démonstration en exercice.

4. Définition avec les coordonnées

Définition : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ est égal à :

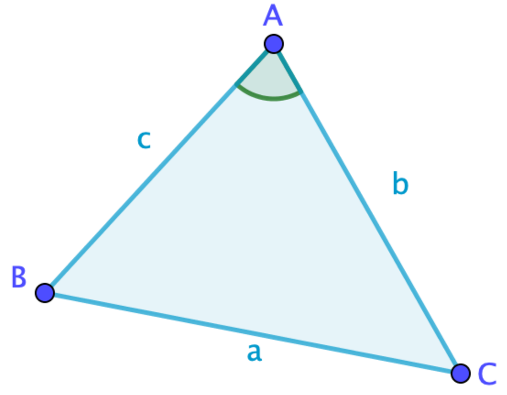
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

Démonstration en exercice.

5. Théorème d'Al-kashi

Théorème : Soit un triangle ABC. On a :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times cos(\hat{A})}$$



Démonstration en exercice.

6. Théorème de la médiane

Soient deux points A et B et leur milieu I, pour tout point M on a la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2}$$

Démonstration en exercice.

7. Caractérisation d'un cercle avec le produit scalaire

Propriété : Un cercle de diamètre $[AB]$ est caractérisé par la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0}$$

Démonstration en exercice.

IV. Géométrie dans un repère

1. Équation d'une droite

Définition : Une droite est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.

Théorème : Toute droite d du plan est déterminée par une équation de la forme :

$$\boxed{d : ax + by + c = 0}$$

On précise que a et b ne sont pas simultanément nuls. Dans ces conditions, le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite d.

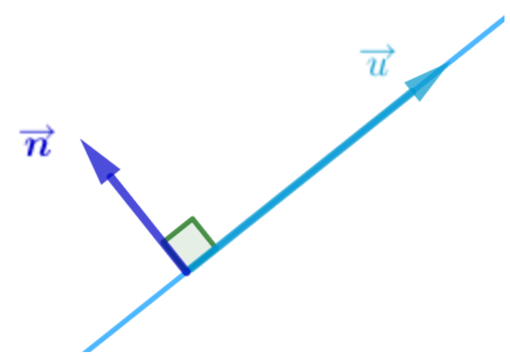
Définition : Toute droite d, non verticale, admet une équation de la forme :

$$\boxed{d : y = mx + p}$$

On précise que le vecteur $\vec{u}(1; m)$ est n vecteur directeur de d.

2. Le vecteur normal à une droite

Définition : Un vecteur normal $\vec{n}$ à une droite d est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d. On a alors $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.



Théorème : Dans un repère orthonormé, on a :

- Si $d : ax + by + c = 0$, alors $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à d.
- Réciproquement si un vecteur $\vec{n}(a; b)$, non nul, est un vecteur normal à une droite d, alors cette droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

2. Equation cartésienne d'un cercle

Théorème : Dans un repère orthonormé, l'équation cartésienne d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r est de la forme :

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Démonstration traitée en exercice.

V. Exercices

Exercice n°1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Vous allez être guidés pour démontrer que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

1. En utilisant la double distributivité du produit scalaire, développez et réduisez l'expression de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ sachant que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2$.
2. Dans l'expression que vous venez d'obtenir, isoler le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et conclure.

Exercice n°2

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$. Nous allons démontrer que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

On rappelle que :

$$(1) : \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Et que :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

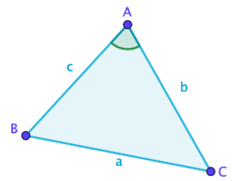
1. Calculez les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
2. En déduire l'expression la norme $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.
3. Donnez l'expression de la norme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
4. En injectant les réponses précédentes dans l'expression (1), retrouvez l'expression analytique du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Exercice n°3

Nous allons à présent démontrer le théorème d'Al-Kashi. On considère un triangle quelconque ABC. On le rappelle dans la relation suivante :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$



1. Démontrez en utilisant une relation de Chasles appropriée que $\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$.
2. Développez et réduisez l'expression de $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$ pour retrouver la relation du théorème d'Al-Kashi.

Exercice n°4

Nous allons démontrer le théorème de la médiane. On le rappelle ici :

Soient deux points A et B et leur milieu I, pour tout point M on a la relation :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

1. En utilisant la relation de Chasles, démontrez que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$.
2. En factorisant par $\overrightarrow{MI}$ et en effectuant une autre opération astucieuse, retrouvez l'expression caractérisant le théorème de la médiane.

Exercice n°5

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et M un point quelconque du cercle.

1. Faire un dessin traduisant la situation et y placer I le milieu de $[AB]$.
2. En appliquant le théorème de la médiane, démontrez que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Exercice n°6

Soit un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r.

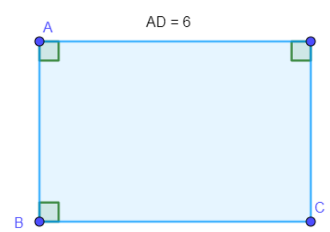
1. Soit un point $M(x;y)$. A quelle condition le point M appartient-il au cercle $\mathcal{C}$?
2. En déduire que : $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Cette relation est appelée équation cartésienne du cercle.

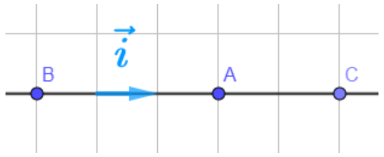
Exercice n°7

Pour chacune des figures suivantes, calculez le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

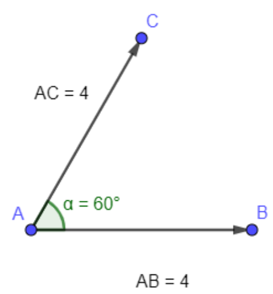
1. Figure 1



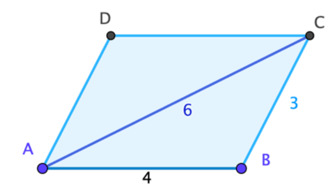
2. Figure 2



3. Figure 3

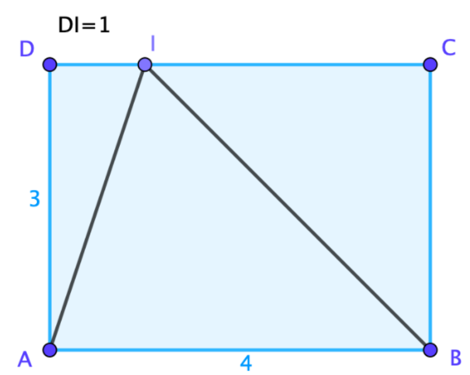


4. Figure 4



Exercice n°8

$ABCD$ est un rectangle, I est un point de $[CD]$ défini comme l'indique la figure ci-dessous.



1. Démontrer que : $(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}+DA^2$.

2. En déduire : $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=6$ et $\cos(\widehat{AIB})=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Exercice n°9

Répondre par vrai ou faux.

1. Soient A, B et C trois points distincts du plan.
   a. A, B et C sont alignés si et seulement si : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC$.
   b. (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
   c. A est le milieu de $[BC]$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB^2$.
2. Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et de côté 2.
   a. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-2$;
   b. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2$;
   c. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}$;
3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}^2=\vec{v}^2$, alors :
   a. $\vec{u}=\vec{w}$;
   b. $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$;
   c. $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux.
4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3$; $\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{2}$, alors :
   a. $(\vec{u};\vec{v})=\frac{2\pi}{3}$;
   b. $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{2}$;
   c. $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{14}$.

Exercice n°10

A, B et C sont trois points tels que $AB=5$ et $AC=8$.

1. Est-il possible d'avoir $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=60$?

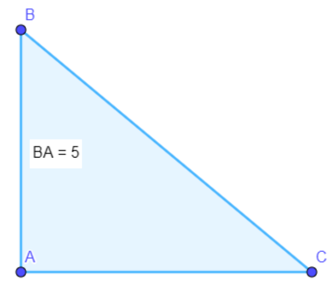
On prend maintenant $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=20$.

2. Quelle est la valeur de $\widehat{BAC}$?
3. Calculer BC.
4. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
5. Quelle est l'aire du triangle ABC ?

Exercice n°11

Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$:

1. ABC est un triangle tel que $AB=6$; $AC=4$; $BC=7$.
2. $A(2;4), B(-1;3), C(1;-2)$ dans un repère orthonormé.
3. $AB=6, AC=5, \widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$.
4. $AB=6$ et on a la figure suivante :



5. $AB = 2AC = 6$:

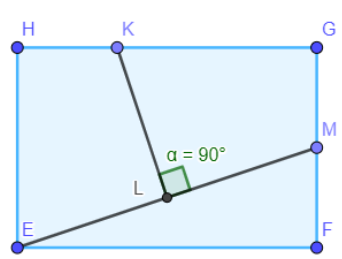
Exercice n°12

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne $A(2;1), B(-1;-3), C(-3;0)$.

1. Faire une figure.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
3. Déterminer la mesure arrondie au dixième de degré de l'angle $\widehat{BAC}$.
4. On note H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC. Calculer la valeur exacte de AH, puis arrondie au mm près.

Exercice n°13

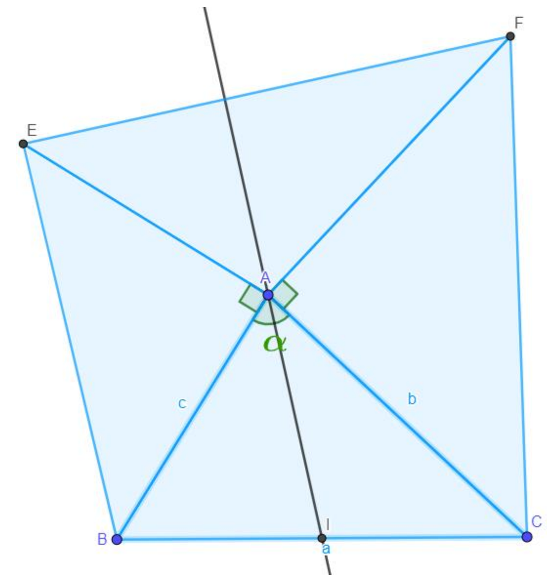
$EFGH$ est un rectangle. M est le milieu de $[FG]$, K est défini par $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3} \times \overrightarrow{HG}$, L est le projeté orthogonal de K sur (EM).



1. Montrer que $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = 5$. (Décomposer chaque vecteur à l'aide de la relation de Chasles).
2. En écrivant le produit scalaire $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM}$ de deux manières différentes, déterminer :
   a. La longueur EL.
   b. Une mesure de l'angle $\widehat{KEM}$.

Exercice n°14

ABC est un triangle tel que $\widehat{BAC}$ soit un angle aigu. BAE et CAF sont deux triangles rectangles isocèles en A. On note $AB = c, AC = b, \widehat{BAC} = \alpha$ en radians.



1. Calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ en fonction de b, c et α ; en déduire que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$.
2. On note I le milieu de $[BC]$; montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2 \times \overrightarrow{AI}$.
3. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que la médiane (AI) du triangle ABC est la hauteur issue de A danas le triangle AEF.

Exercice n°15

A, B, C sont trois points du plan tels que $AB = 3, AC = 2, \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

1. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

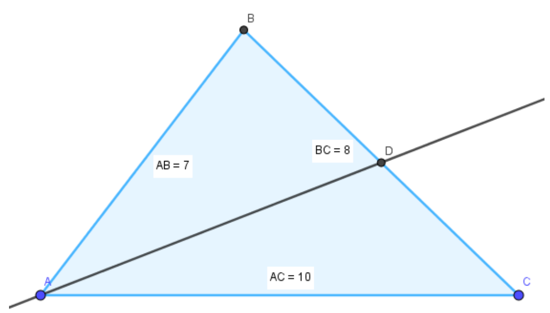
2. Construire les points D et E définis par $\overrightarrow{AD} = 2 \times \vec{u} - 3 \times \vec{v}$ et $\overrightarrow{AE} = -\vec{u} + 4 \times \vec{v}$.

3. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$ puis $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE}$.

4. En déduire une valeur approchée à $0{,}1°$ près de l'angle $\widehat{DAE}$.

Exercice n°16

On considère la figure suivante :



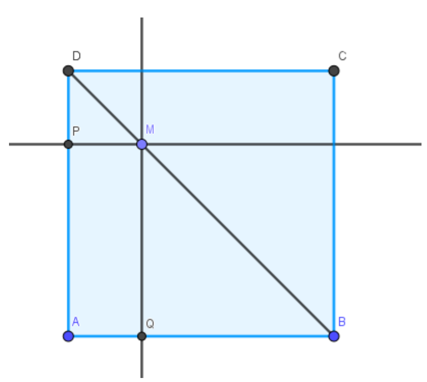
1. Calculer la valeur exacte de $\cos(\widehat{ABC})$, puis une valeur approchée de $\widehat{ABC}$ arrondie au degré près.

2. Calculer la valeur exacte de $\sin(\widehat{ABC})$; en déduire l'aire du triangle ABC.

3. D est le milieu de $[BC]$, calculer AD.

Exercice n°17

$ABCD$ est un carré de côté 1 et M est un point de la diagonale $[BD]$. On note P le projeté orthogonal de M sur (AD) et Q le projeté orthogonal de M sur (AB). Le but est de montrer que les droites (CP) et (DQ) sont perpendiculaires.



Première méthode : Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$n on pose $\overrightarrow{DM} = x \times \overrightarrow{DB}$.

1. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure.

2. Calculer $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ}$. Conclure.

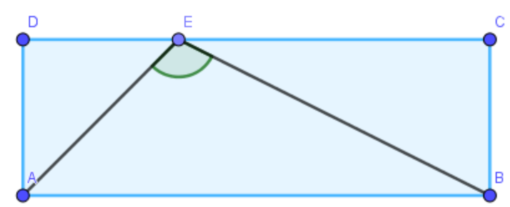
Deuxième méthode :

1. Justifiez que $\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AB}$.

2. En déduire que $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0$. Conclure.

Exercice n°18

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $BC = a$ et $AB = 3BC$.On note E le point de $[CD]$ tel que $DE = a$. Le but de l'exercice est de déterminer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}$ pour en déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{AEB}$.



1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E dans le repère orthonormal $(A; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ avec $\overrightarrow{AB} = 3a \times \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{AD} = a \times \vec{\jmath}$.

2. En déduire une expression de $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}$ en fonction de a.

3. Exprimer les longueurs EA et EB en fonction de a.

4. En déduire une expression $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}$ en fonction de a et de $\widehat{AEB}$.

5. Déduire des questions précédentes une valeur approchée de $\widehat{AEB}$ en degré à 10^{-1} près.

Exercice n°19

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$; $AC = 11$ et $BC = 13$. On note α la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

1. Déterminer la valeur exacte de $\cos(\alpha)$ puis une valeur approchée à $0{,}01$ radian près de α.
2. Soit H le pied de la hauteur issue de C. Justifiez que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
3. Déterminer AH.
4. En déduire l'aire du triangle.

Exercice n°20

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x - 5y + 3 = 0$.

1. Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
2. Déterminer une équation de la droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par le point $A(-1; 6)$.
3. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ avec $B(1; 1)$.
4. Justifier que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont tangents.

Exercice n°21

On complètera la figure au fur et à mesure.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$; préciser son centre et son rayon.
2. On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0$; déterminer son centre et son rayon.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{C}$; on notera I celui dont l'ordonnée est la plus grande, et J l'autre point.
4. Répondre aux questions suivantes :
   a. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{E}$ en J.
   b. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en J.
   c. Montrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires.

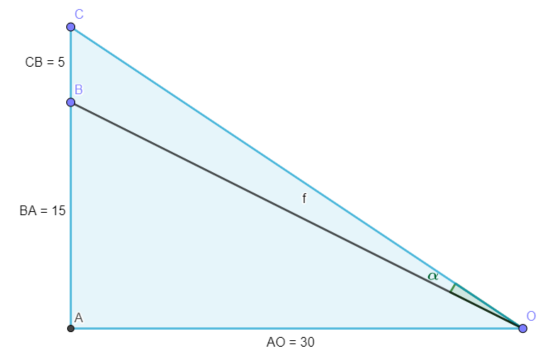
Exercice n°22

Dans chacun des cas suivants déterminer le réel m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

1. $\vec{u}(-5; 2)$ et $\vec{v}(m; -2)$;
2. $\vec{u}(m; 3-m)$ et $\vec{v}(2; -m)$;
3. $\vec{u}(m-4; 2m+1)$ et $\vec{v}(2m; 3-m)$;

Exercice n°23

On considère la figure suivante :

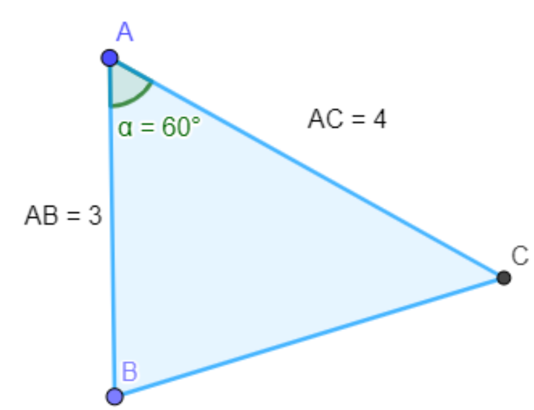


1. Démontrer que $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Dans le cas de la figure, calculer l'angle α.

Exercice n°24

Dans la figure ci-dessous, calculer :

1. L'aire du triangle ABC.
2. Le périmètre du triangle ABC.



Exercice n°25

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 7$ $AD = 3$ et $AC = 8$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=3$.
2. En calculant $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ d'une autre façon, trouver $\cos\left(\widehat{BAD}\right)$.
3. En déduire que $\sin\left(\widehat{BAD}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.
4. Calculer l'aire du triangle BAD.
5. En déduire celle du parallélogramme $ABCD$.

Exercice n°26

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(3;-1)$, $B(2;-4)$ et $C(-2;1)$.

1. Déterminer une équation de la droite (d_1), médiatrice du segment $[AB]$ et vérifier que $D(-2;-1)\in(d_1)$.
2. Déterminer une équation de la droite (d_2) , hauteur issue de A dans le triangle ABC et vérifier que $E(-2;-5)\in d_2$.
3. On admet que (d_1) et (d_2) sont sécantes. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection, noté F.
4. Calculer, au dixième de degré près, une mesure de l'angle aigu formé par les droites (d_1) et (d_2).

Exercice n°27

Soient A et B deux points du plan tels que $AB=5$. On cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $MA^2-MB^2=10$.

1. On note I le milieu de $[AB]$, démontrer que $M\in\mathcal{E}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}=5$.
2. Soit H le projeté orthogonal du point M sur (AB), montrer que $M\in\mathcal{E}\Leftrightarrow IH=1$. En déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice n°28

Soient deux points A et B avec $AB=6$. Soit I le milieu de $[AB]$.

Le but est de déterminez l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=16$.

1. Montrer que $M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow MI^2=25$ (on pourra décomposer les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en introduisant le point I).
2. Déterminer alors précisément l'ensemble $\mathcal{C}$.
3. On donne $A(-1;2), B(2;-2)$ et $C(-2;-1)$ dans un repère orthonormé. En utilisant les coordonnées des vecteurs, déterminer précisément l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=3$.

Exercice n°29

On considère un triangle ABC tel que $A(-1;3), B(2;4)$ et $C(3;-2)$. Démontrer que les trois hauteurs de ce triangle sont concourantes en un même point. (On appelle ce point l'orthocentre du triangle ABC).

Exercice n°30

Les droites d_1 et d_2 ont respectivement pour équation cartésienne :

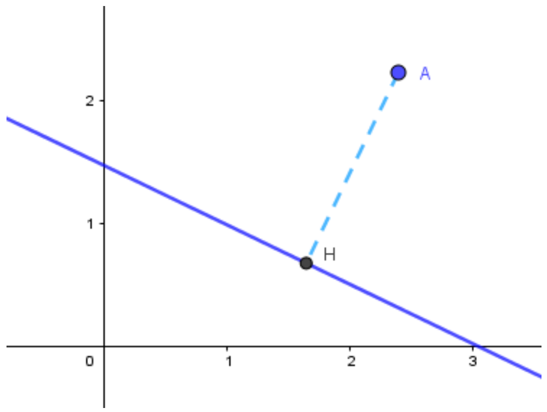
- $d_1 : 3x-2y-8=0$;
- $d_2 : 5x+4y-6=0$.

Le droite Δ a pour équation : $2mx-(m+1)y-8=0$.

Comment choisir le paramètre m pour que ces trois droites soient concourantes.

Exercice n°31

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on donne la droite d d'équation $ax+by+c=0$ et le point $A(x_A;y_A)$. On appelle H le projeté orthogonal de A sur la droite d.



1. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a; b)$ est normal à d. Démontrer que :

$$\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} \times AH$$

2. $H(x; y)$ est un point de d donc $ax + by + c = 0$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$ et établir la formule :

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3. Une droite d a pour équation $3x + 4y - 12 = 0$. Trouver une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(5; 3)$ tangent) d.

4. La droite d' d'équation $x + y\sqrt{3} - 2 = 0$ est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 ?