plus de bonnes notes
le soutien scolaire connecté

Jeudi 17 août 2023.

Prépa.

Exercice 1 : $n \in \mathbb{N}^*$.

$$H_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1}$$

$$H_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2}.$$

$$H_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

$$H_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

$$3 + 2 + 8 + 1{,}5 + 40 = S$$
$$\text{VI} \quad \text{VI} \quad \text{VI} \quad \text{VI} \quad \text{VI}$$
$$1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 = 1{,}5 \times_{\nearrow}$$
nbre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n}} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \cancel{\sum_{k=1}^{n}} \frac{1}{k}.$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Prouver que $\geqslant \frac{1}{2}$.

Le plus petit élément de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ est $\frac{1}{2n}$.

Cette somme contient n éléments $(2n - n)$. On en déduit un minorant de cette somme :

$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2\cancel{n}} \times \cancel{n}$$

plus de bonnes notes
le soutien scolaire connecté

$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$$

b) Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
est irrationnel.

Supposons par l'absurde que (H_n) est convergente.

$$\lim_{n \to +\infty} H_n = \ell \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{n \to +\infty} H_{2n} = \ell \in \mathbb{R}$$

$f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{3x}} = 0$$

$f(3x)$.

$$\lim_{n \to +\infty} H_{2n} - H_n = 0$$

ce qui est absurde

car $H_{2n} - H_n$ est minoré par $\frac{1}{2}$.

Donc H_n est divergente : $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

ou

$$\lim_{n \to +\infty} H_n = -\infty.$$

ou pas de limite.

Or (H_n) est croissante donc $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

2) $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$

plus de bonnes notes
le soutien scolaire connecté

$\cancel{H_{2^1}} - H_1 \geq \frac{1}{2}$

$+$

$\cancel{H_{2^2}} - \cancel{H_2} \geq \frac{1}{2}$

$\cancel{H_{2^3}} - \cancel{H_4} \geq \frac{1}{2}$

$\cancel{H_{2^4}} - \cancel{H_8} \geq \frac{1}{2}$

$\cdots$

$H_{2^{n+1}} - \cancel{H_{2^n}} \geq \frac{1}{2}$

$H_{2^{n+1}} - H_1 \geq \frac{1}{2} \times (n+1)$

$\downarrow$

H_n

$$\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} H_{2^k} - H_{2^{k-1}}$$

$$= H_{2^{n+1}} - H_{2^n}.$$