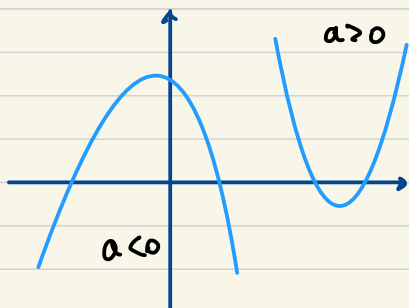


Second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

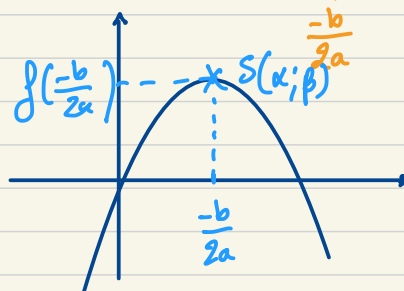
$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a \neq 0$$



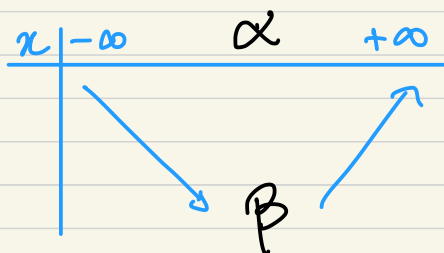
forme canonique:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

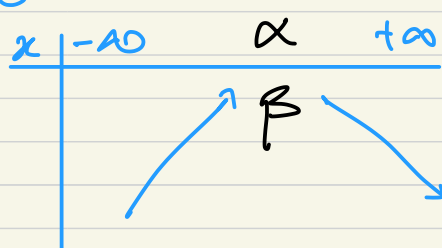


Variations

$a > 0$



$a < 0$



Application:

Donner le tableau de variation de $x^2 + 2x + 1$.

$$a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$= 1 \left(x - \left(\frac{-b}{2a} \right) \right)^2 + f\left(\frac{-b}{2a} \right)$$

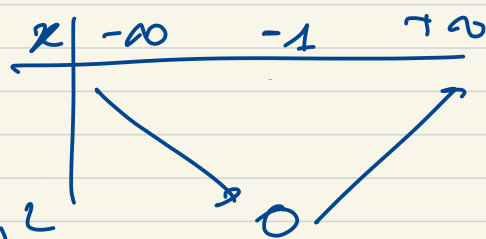
$$= 1 \left(x - \left(\frac{-2}{2 \times 1} \right) \right)^2 + f\left(\frac{-2}{2 \times 1} \right)$$

$$= 1(x + 1)^2 + f(-1)$$

$$= (x + 1)^2 + 0 = (x + 1)^2$$

$$= a(x + 1)^2 + \beta$$

$$\alpha = -1 \quad \beta = 0$$



$$x^2 + 6x - 8$$

$$x^2 - 5x + 3$$

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

\downarrow \downarrow
 $-\frac{b}{2a}$ $f(-\frac{b}{2a})$

$$x^2 + 6x - 8$$

$$= 1(x - (-3))^2 + (-17)$$

$$= (x + 3)^2 - 17.$$

$$\alpha = \frac{-6}{2 \times 1} = -3$$

$$\beta = f(-3) = (-3)^2 + 6 \times (-3) - 8$$

$$= 9 - 18 - 8 = -17$$

$$x^2 - 5x + 3$$

$$= 1(x - 2,5)^2 + \left(-\frac{13}{4}\right)$$

$$= (x - 2,5)^2 - \frac{13}{4}$$

$$\alpha = \frac{-(-5)}{2 \times 1} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

$$\beta = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \times \frac{5}{2} + 3 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{12}{4}$$

$$= \frac{-13}{4} = -3,25.$$

Resolution d'equation.

$$2x^2 + x = 0$$

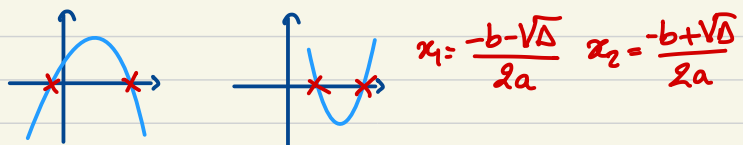
$$x(2x + 1) = 0$$

\downarrow \downarrow
 $x = 0$ $2x + 1 = 0$
 $x = -\frac{1}{2}$

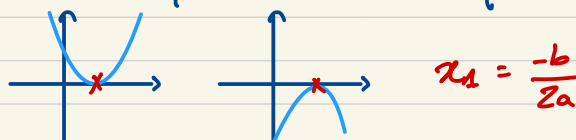
$$ax^2 + bx + c = 0$$

discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$) $\in \mathbb{R}$

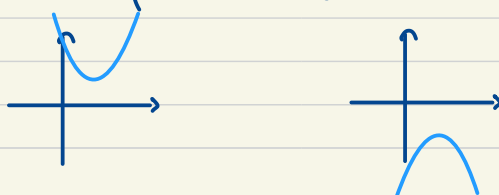
$\Delta > 0$ alors l'equation admet 2 solutions distinctes.



$\Delta = 0$ alors l'equation admet 1 unique solution.



$\Delta < 0$ alors l'equation n'admet aucune solution réelle.



Application :

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) \\ &= 1 + 24 \\ &= 25 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ 2 solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{1-5}{2} \quad x_2 = \frac{1+5}{2}$$

$$= \frac{-4}{2} \quad = \frac{6}{2}$$

$$\boxed{-2} \quad \boxed{3}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) \\ \Delta &= 4 + 12 \\ \Delta &= 16 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2}{2} \boxed{+1} \quad = \quad \frac{-6}{2} \boxed{-3}$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= 1 - 8 = -7 < 0 \end{aligned}$$

pas de solutions.

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x+1} = 2x - 1$$

$$\boxed{x+1}$$

l'égalité n'est pas définie en (-1)

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)$$

$$= 1 + 8 = 9$$

$$x^2 + 2x + 1 = (2x - 1)(x + 1)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x - x - 1$$

$$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + x - 1$$

$$0 = 2x^2 - x^2 + x - 2x - 1 - 1$$

$$\boxed{0 = x^2 - x - 2}$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2}$$

$$= \frac{-2}{2} \boxed{-1}$$

$$= \frac{4}{2} \boxed{2}$$

on a un problème puisque le dénominateur s'annule en (-1) on retient donc seulement 2 comme solution.

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

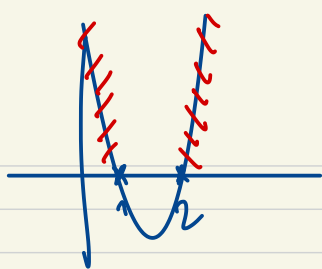
$$\begin{aligned} \Delta &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= 9 - 8 = 1 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2} \quad x_2 = \frac{3-1}{2}$$

$$\boxed{2} \quad \boxed{1}$$

$$x^2 + 4 \geq 0$$

$$\underline{x \in \mathbb{R}}$$



$$x \in]-\infty[\cup]2; +\infty[$$

$$x^2 - x + 1 < 0.$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 < 0$$

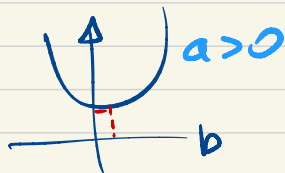
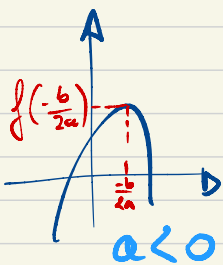
$$x \in \emptyset \quad \text{ensemble vide.}$$

Second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0.$$

1er deg

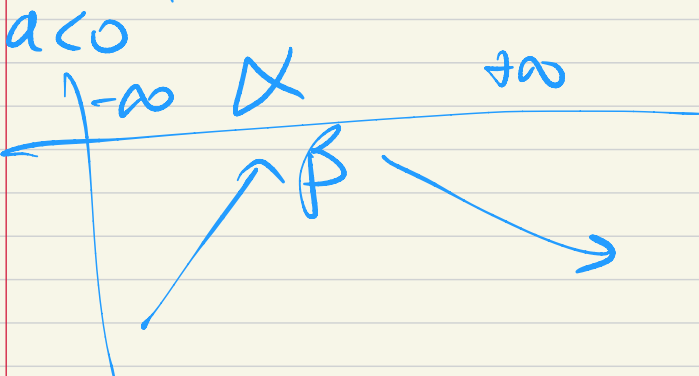
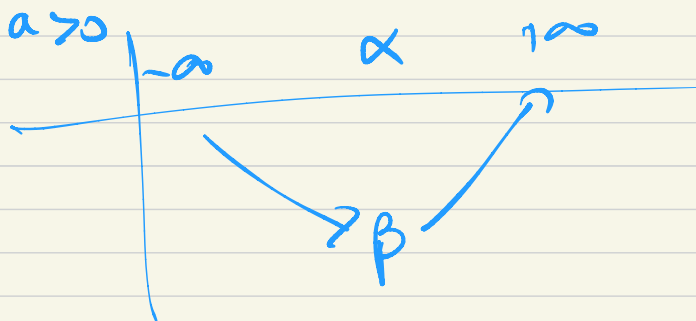
$$\frac{ax+b}{\quad}$$



forme canonique.

$$f(x) = a \left(x - \alpha \right)^2 + \beta$$

\downarrow \downarrow
 $-\frac{b}{2a}$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$



$$ax^2 + bx + c = 0$$

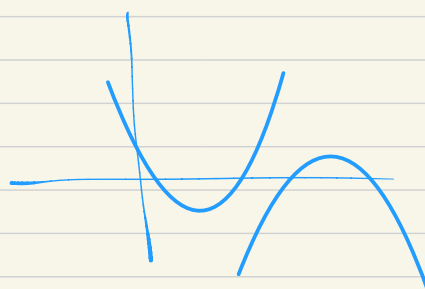
$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

$\Delta > 0$ 2 solutions

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = 0$ 1 solution $x_1 = \frac{-b}{2a}$

$\Delta < 0$ \emptyset solution.

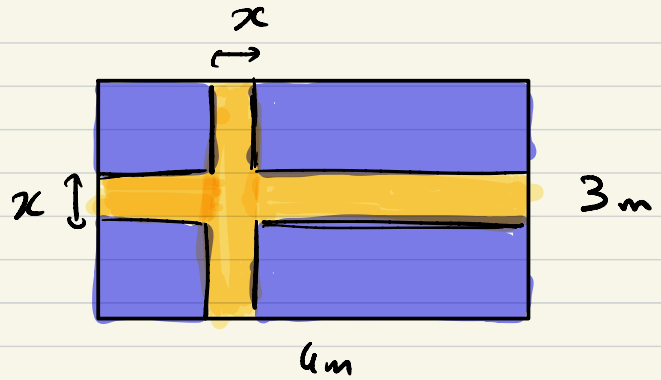


$$-2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 3^2 - 4 \times (-2) \times (-5)$$

$$= 9 - 40 < 0$$



$$A_{\text{jeune}} = A_{\text{plein}}$$

$$3x + 4x - x^2 = 12 - (3x + 4x - x^2)$$

$$7x - x^2 = 12 - 7x + x^2$$

$$0 = 12 - 14x + 2x^2$$

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \times 2 \times 12$$

$$= 100$$

$$x_1 = \frac{14 - \sqrt{100}}{2 \times 2} \quad x_2 = \frac{14 + \sqrt{100}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{4}{4} = \boxed{1} = \frac{24}{4} = \boxed{6}$$

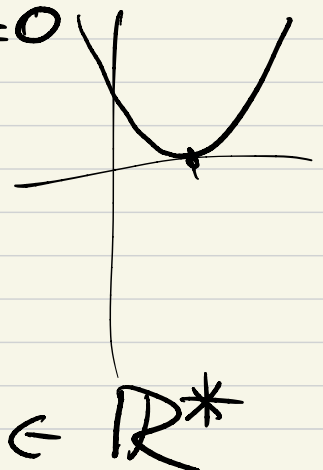
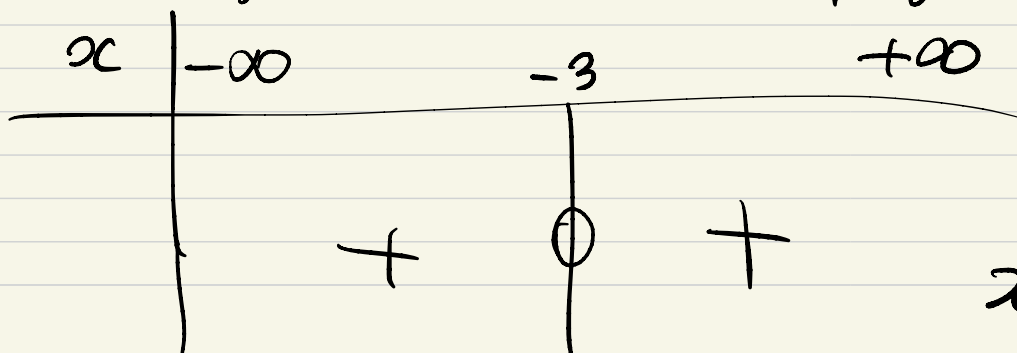
non valide dans le cas de l'erreur

$$3x^2 + 18x + 27 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (18)^2 - 4 \times 3 \times 27 = 324 - 324 = 0 \quad \Delta = 0$$

Donc la fonction s'annule une unique fois



$$x^2 + 7x + 12 \geq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

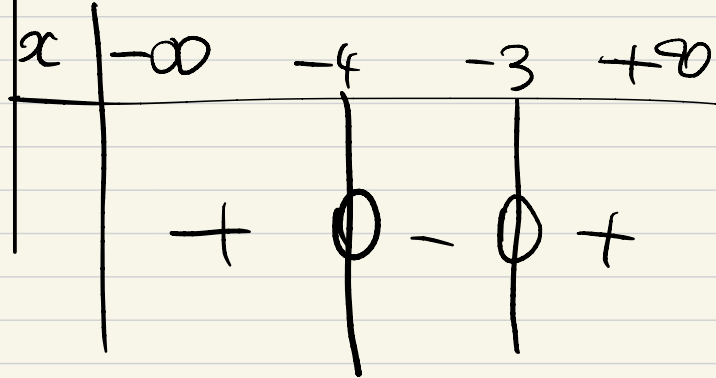
$$= 7^2 - 4 \times 1 \times 12$$

$$= 49 - 48 = 1 \quad \Delta > 0$$

Donc il y a 2 solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-6}{2} = -3$$



$$x \in]-\infty; -4] \cup [-3; +\infty[$$

Exercice 1

Mettre sous forme canonique les trinômes suivants

$$\frac{2x^2 + 8x - 2}{a \quad b \quad c}$$

;

$$x^2 + 3x + 1$$

;

$$-x^2 + 2x + 5$$

;

$$3x^2 + x - 4$$

Exercice 2

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$a = 2$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \times 2} = \frac{-8}{4} = \boxed{-2}$$

$$\beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(-2) = 2(-2)^2 + 8(-2) - 2$$

$$= 2 \times 4 - 16 - 2$$

$$= 8 - 16 - 2 = -10$$

$$f(x) = 2(x + 2)^2 - 10$$

$$a = 1$$

$$\alpha = \frac{-3}{2}$$

$$\beta = f\left(\frac{-3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{-3}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 1$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{4}{4} = \frac{-5}{4}$$

$$f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$$-x^2 + 2x + 5$$

$$a = -1$$

$$\alpha = \frac{-2}{2 \times (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\beta = f(1) = -1^2 + 2 \times (1) + 5 \\ = -1 + 2 + 5 = 6$$

$$\text{Denn } f(x) = -(x-1)^2 + 6$$

$$a = 3$$

$$\alpha = \frac{7}{2 \times 3} = \frac{7}{6}$$

$$\beta = F\left(-\frac{1}{6}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 7 \times \left(-\frac{1}{6}\right) - 4 \\ = 3 \times \frac{1}{36} + -\frac{7}{6} - 4 \\ = \frac{3}{36} - \frac{7}{6} - 4 \\ = \frac{3}{36} - \frac{6}{36} - \frac{48}{9} = -3,75$$

$$\text{Denn } F(x) = -(x-3)^2 - 3,75$$

~~Thrusten~~

Exercices supplémentaires – Second degré

Partie A : Forme canonique, équations, inéquations, factorisation

Exercice 1

Mettre sous forme canonique les trinômes suivants

$$\underset{a}{2}x^2 + \underset{b}{8}x - \underset{c}{2} \quad ; \quad x^2 + 3x + 1 \quad ; \quad -x^2 + 2x + 5 \quad ; \quad 3x^2 + x - 4$$

Exercice 2

On considère $f: x \mapsto x^2 - 5x + 6$ défini sur \mathbb{R} .

- 1) Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
- 2) En déduire une factorisation de $f(x)$.
- 3) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 3

On considère $f: x \mapsto -2x^2 + 6x - 1$ défini sur \mathbb{R} .

- 1) Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
- 2) En déduire une factorisation de $f(x)$.
- 3) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

$$2x^2 - 12x + 18 = 0 \quad ; \quad x^2 - x + 6 = 0 \quad ; \quad 3x^2 + 4x - 1 = 0 \quad ; \quad 2x^2 - x + 1 = 0$$

Exercice 5

Déterminer les éventuels points d'intersection des paraboles suivantes avec l'axe des abscisses

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad ; \quad y = 3x^2 + 2x + 3 \quad ; \quad y = -x^2 - 9x - 20 \quad ; \quad y = x^2 + 2x$$

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes :

$$x^2 + 5x + 3 = 2x + 3 \quad ; \quad (2t + 1)(t - 4) = t^2 - 4t - 6 \quad ; \quad (t + 2)^2 = 2t^2 + 5t - 2$$
$$(x + 1)(x + 2) = (x + 3)(x + 4) + (x + 5)(x + 6)$$

Exercice 7

Factoriser, si possible, les trinômes suivants, en un produit de deux polynômes de degré 1 :

$$x^2 - 4x - 1 \quad ; \quad x^2 - x - 6 \quad ; \quad 3x^2 + 7x + 2 \quad ; \quad 16x^2 + 24x + 9$$

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1}$$

- 1) Tracer à la calculatrice la courbe de la fonction f . Que peut-on en dire ?
- 2) Factoriser $-x^2 + 3x + 4$.
- 3) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$. Est-elle valable pour toute valeur de x ?

Exercice 9

Résoudre les inéquations suivantes

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8 > 0 \quad ; \quad x^2 + 3x - 5 < x + 4 \quad ; \quad 2(x + 1)^2 - 3x > 2 \quad ; \quad 3x + \frac{1}{2x} \leq \frac{5}{2}$$

Exercice 10

Charles affirme avoir trouvé une solution entière à l'équation $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{8} = 0$.

Qu'en pensez-vous ?

Exercice 11

- 1) Factoriser les polynômes $x^2 - x - 6$ et $2x^2 + 3x - 2$.
- 2) Résoudre l'équation $\frac{2}{x^2 - x - 6} + \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} = 0$.

Partie B : Equations à paramètres, changement de variable, identification

Exercice 1

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$.

- 1) Montrer que 1 est solution de $g(x) = 0$.
- 2) Déterminer trois réels a, b et c tels que $g(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ pour tout réel x .
- 3) En déduire le signe de $g(x)$.

Exercice 2

Résoudre les équations bicarrées suivantes en posant $u = x^2$:

$$x^4 - 12x^2 + 27 = 0 \quad ; \quad x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

Exercice 3

- 1) Résoudre l'équation $2x^2 + 5x + 2 = 0$.
- 2) En utilisant un changement d'inconnue, en déduire les solutions de l'équation

$$\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + 2 = 0$$

- 3) Par une méthode analogue, résoudre l'équation $x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 25x + 42$.

- 1) Développer, ordonner et réduire $(x + 3)(ax^2 + bx + c)$.
- 2) Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = (x + 3)(ax^2 + bx + c)$ pour tout réel x .
- 3) Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 5

On considère le trinôme suivant : $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3)$.

Pour quelles valeurs de m ce trinôme a-t-il une racine double ? Calculer alors cette racine.

Exercice 6

On considère le trinôme $x^2 - (2m + 3)x + m^2$.

Pour quelles valeurs de m ce trinôme a-t-il une racine double ? Calculer alors cette racine.

Exercice 7

On considère l'équation $2x^2 - (m + 2)x + m - 2 = 0$.

- 1) Calculer m pour que l'une des solutions soit égale à 3.
- 2) En déduire l'autre solution de l'équation.

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes :

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad ; \quad \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = -1 \quad ; \quad \frac{2x+m}{x} - \frac{2x}{x+m} = 2 \quad \text{où } m \text{ est un réel donné}$$

Exercice 9

- 1) A l'aide de la calculatrice, tracer les courbes représentatives des fonctions $f: x \mapsto 7 - x$ et $g: x \mapsto 2\sqrt{x-4}$.
- 2) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.
- 3) Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 10

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2 - ax + 3$ où a est un nombre réel.

- 1) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles h admet deux racines distinctes.
- 2) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles h admet une racine double.
- 3) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles h n'admet pas de racine.
- 4) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le minimum de h est strictement inférieur à -1 .

Partie C : Déterminer un trinôme sous conditions

Exercice 1

On considère une parabole \mathcal{P} d'équation $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par les points $A(0; 3)$, $B(1; 5)$ et $C(2; 15)$.

- 1) Ecrire un système de trois équations d'inconnues a, b et c traduisant l'énoncé.
- 2) Résoudre le système.
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{P} avec l'axe des abscisses.

Exercice 2

On considère une parabole \mathcal{P} d'équation $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par les points $A\left(1; -\frac{3}{2}\right)$, $B(2; -6)$ et $C\left(3; -\frac{25}{2}\right)$.

- 1) Ecrire un système de trois équations d'inconnues a, b et c traduisant l'énoncé.
- 2) Résoudre le système.
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{P} avec l'axe des abscisses.

Exercice 3

On considère un polynôme f de degré 2 tel que $f(11) = 181$ et pour tout réel x ,

$$x^2 - 2x + 2 \leq f(x) \leq 2x^2 - 4x + 3$$

- 1) On pose $g(x) = x^2 - 2x + 2$ et $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Déterminer les formes canoniques de g et h .
- 2) En déduire que pour tout réel x , on a $f(x) \geq 1$.
- 3) Déterminer $f(1)$
- 4) A l'aide des informations précédentes, déterminer la forme canonique de f puis sa forme développée.

Partie D : Variations, extremum, propriété de la courbe, position relative

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elles admettent un minimum ou un maximum et en quelle valeur il est atteint :

$$f: x \mapsto 3x^2 + 4 \quad ; \quad g: x \mapsto -2(x - 4)^2 + 8 \quad ; \quad h: x \mapsto -2x^2 + 8x - 1$$

Exercice 2

Dresser, en justifiant, le tableau de variations des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto x^2 + 4x - 6 \quad ; \quad g: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 5x$$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[-5; 3]$ par $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$.

- 1) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f .
- 2) En déduire le minimum et le maximum de f sur $[-5; 3]$.
- 3) Résoudre :
 - a. $f(x) = -10$
 - b. $f(x) = 17$
 - c. $f(x) < 17$
 - d. $f(x) > -20$

Exercice 4

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 - 3x$$

- 1) Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$
- 2) Que peut-on en déduire pour les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ?

Exercice 5

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5}{x^2 + x + 1}$$

- 1) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que pour tout réel x , $f(x) < 5$ et $f(x) > -6$.

Exercice 6

Pour un nombre réel x , le seul nombre dont le cube est égal à x s'appelle la racine cubique de x et se note $\sqrt[3]{x}$.
Par exemple $\sqrt[3]{1000} = 10$ car $10^3 = 1000$.

On définit $t = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

- 1) Montrer que $t^3 + 3t - 4 = 0$.
- 2) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $(t - 1)(at^2 + bt + c) = t^3 + 3t - 4$ pour tout réel t .
- 3) En déduire que t est un nombre entier.

Exercice 5

Déterminer les éventuels points d'intersection des paraboles suivantes avec l'axe des abscisses

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad ; \quad y = 3x^2 + 2x + 3 \quad ; \quad y = -x^2 - 9x - 20 \quad ; \quad y = x^2 + 2x$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4.$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4 - 2}{2} = \boxed{1}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4 + 2}{2} = \boxed{3}$$

$$3x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 3$$

$$\Delta = 4 - 36 < 0$$

La parabole ne croise pas l'axe des abscisses.

$$-x^2 - 9x - 20 = 0$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times (-1) \times (-20)$$

$$\Delta = 81 - 80$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)}$$

$$= \frac{9 - 1}{-2} = \frac{8}{-2} = \boxed{-4}$$

$$x_2 = \frac{9 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)}$$

$$= \frac{9 + 1}{-2} = \frac{10}{-2} = \boxed{-5}$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$\boxed{x=0}$$

$$x+2=0$$

$$\boxed{x=-2}$$

Exercice 1

On considère une parabole \mathcal{P} d'équation $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par les points $A(0; 3)$, $B(1; 5)$ et $C(2; 15)$.

- 1) Ecrire un système de trois équations d'inconnues a , b et c traduisant l'énoncé. x y x y x y
- 2) Résoudre le système.
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{P} avec l'axe des abscisses.

1) $A \in \mathcal{C}_f$
 $f(x_A) = y_A$
 $f(0) = 3$
 $ax^2 + bx + c = 3$
 $c = 3$

$B \in \mathcal{C}_f$
 $f(x_B) = y_B$
 $f(1) = 5$
 $ax^2 + bx + c = 5$
 $a + b + c = 5$
 $a + b + 3 = 5$
 $a + b = 2$

$C \in \mathcal{C}_f$
 $f(x_C) = y_C$
 $f(2) = 15$
 $ax^2 + bx + c = 15$
 $4a + 2b + 3 = 15$
 $4a + 2b = 12$
 $2a + b = 6$

3) $4x^2 - 2x + 3 = 0$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 \times 3$$

$$\Delta = 4 - 48 < 0$$

Donc la parabole ne croise pas l'axe des abscisses.

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{cases}$$

Combinaison

$$\begin{array}{r} \begin{cases} a+b=2 \\ -2a+b=6 \end{cases} \\ \hline -a+0=-4 \\ -a=-4 \\ \boxed{a=4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow a+b=2 \\ 4+b=2 \\ \boxed{b=2-4=-2} \end{array}$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{cases}$$

Substitution

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ 2(2-b)+b=6 \end{cases} \begin{array}{l} \rightarrow \text{isoler 1 des 2 inconnues -} \\ \rightarrow \text{injecter dans la seconde} \\ \text{equation} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ 4-2b+b=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ 4-b=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ b=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a=2-(-2)=4} \\ \boxed{b=-2} \end{cases}$$

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes :

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad ; \quad \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = -1 \quad ; \quad \frac{2x+m}{x} - \frac{2x}{x+m} = 2 \quad \text{où } m \text{ est un réel donné}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x} \frac{x^2+1}{x} = 3 \times x$$

$$\Rightarrow x^2+1 = 3x$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = -1$$

$$\frac{4(x-2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{3(x-1)}{(x-1)(x-2)} = -1$$

$$\frac{4(x-2) - 3(x-1)}{(x-1)(x-2)} = -1$$

$$\frac{4x-8-3x+3}{(x-1)(x-2)} = -1$$

$$\frac{x-5}{(x-1)(x-2)} = -1$$

$$-(x-5) = (x-1)(x-2)$$

$$-x+5 = x^2-2x-x+2$$

$$0 = x^2 - 2x - \cancel{x} + \cancel{x} + 2 - 5$$

$$0 = x^2 - 2x - 3$$

$$\cancel{x(x+m)} \times \frac{(2x+m)(x+m) - 2x \times x}{x(x+m)} = 2 \times x(x+m)$$

$$(2x+m)(x+m) - 2x^2 = 2x(x+m)$$

$$\cancel{2x^2} + \cancel{2x}x + mx + m^2 - 2x^2 = \cancel{2x^2} + \cancel{2x}m$$

$$-2x^2 + mx + m^2 = 0$$

$$\Delta = m^2 - 4 \times (-2) \times (m^2)$$

$$\Delta = m^2 + 8m^2 = 9m^2$$

$$\sqrt{9m^2} = 3m$$

$$x_1 = \frac{-m-3m}{2 \times (-2)}$$

$$x_2 = \frac{-m+3m}{-4}$$

$$= \frac{-4m}{-4} = \boxed{m}$$

$$= \frac{-2m}{4} = \boxed{\frac{-m}{2}}$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3)$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{16}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2-\sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = \boxed{3}$$

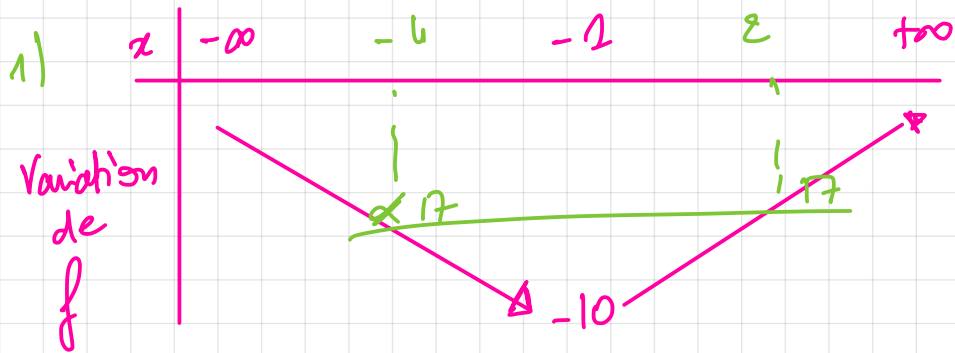
$$x_2 = \boxed{-1}$$

Exercice 3

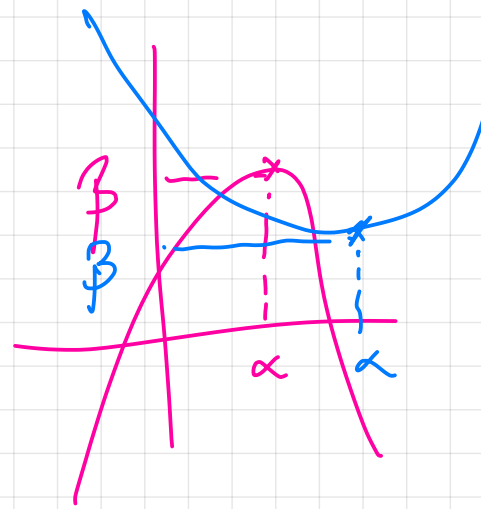
On considère la fonction f définie sur $[-5; 3]$ par $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$.

- 1) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f .
- 2) En déduire le minimum et le maximum de f sur $[-5; 3]$.
- 3) Résoudre :
 - a. $f(x) = -10$
 - b. $f(x) = 17$
 - c. $f(x) < 17$
 - d. $f(x) > -20$

$x = -1$
 $x = 2$ $x = -4$
 $] -4; 2[$
 $\rightarrow \mathbb{R} \quad]-\infty; +\infty[$



- 2) minimum vaut -10 atteint en -1
maximum vaut 38 atteint en -5 et en 3 .



$\alpha = -1$
 $\beta = -10$

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

$$\beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

$$\beta = \frac{-\Delta}{4a}$$

Correction exercices supplémentaires – Second degré

Partie A : Forme canonique, équations, inéquations, factorisation

Exercice 1

Pour tout réel x ,

$$2x^2 + 8x - 2 = 2(x^2 + 4x - 1) = 2[(x + 2)^2 - 4 - 1] = \boxed{2(x + 2)^2 - 10}$$

car $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ donc $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$

Pour tout réel x ,

$$x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = \boxed{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$$

car $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

Pour tout réel x ,

$$-x^2 + 2x + 5 = -(x^2 - 2x - 5) = -[(x - 1)^2 - 1 - 5] = \boxed{-(x - 1)^2 + 6}$$

car $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Pour tout réel x ,

$$3x^2 + x - 4 = 3\left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right) = 3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} - \frac{4}{3}\right] = \boxed{3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{49}{12}}$$

Car $x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = \left(x + \frac{1}{6}\right)^2$

Exercice 2

1) Pour tout réel x :

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \boxed{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

2) Pour tout réel x ,

$$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = \boxed{(x - 3)(x - 2)}$$

3)

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
Signe de $x - 3$	-	-	0	+	
Signe de $x - 2$	-	0	+	+	
Signe de $f(x)$	+	0	-	0	+

Les solutions de $f(x) > 0$ sont donc $\boxed{]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[}$

Exercice 3

1) Pour tout réel x ,

$$f(x) = -2x^2 + 6x - 1 = -2\left(x^2 - 3x + \frac{1}{2}\right) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\right] = \boxed{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}}$$

2) Pour tout réel x ,

$$f(x) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}\right] = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right] = \boxed{-2\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)}$$

3)

x	$-\infty$	$\frac{3 - \sqrt{7}}{2}$	$\frac{3 + \sqrt{7}}{2}$	$+\infty$	
Signe de $x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}$	-	-	0	+	
Signe de $x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}$	-	0	+	+	
Signe de $f(x)$	+	0	-	0	+

Les solutions de $f(x) > 0$ sont donc $\boxed{\left] -\infty; \frac{3-\sqrt{7}}{2} \right[\cup \left] \frac{3+\sqrt{7}}{2}; +\infty \right[}$

Exercice 4

Pour $2x^2 - 12x + 18$: $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 0$ donc le trinôme a une unique racine $x_0 = \frac{12}{4} = 3$.

D'où $\boxed{S = \{3\}}$

Pour $x^2 - x + 6$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -23 < 0$ donc le trinôme n'a pas de racines : $\boxed{S = \emptyset}$

Pour $3x^2 + 4x - 1$: $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 + 12 = 28 > 0$ donc le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{28}}{6} = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}; \frac{-2 - \sqrt{7}}{3} \right\}}$$

Pour $2x^2 - x + 1$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$ donc le trinôme n'a pas de racines : $\boxed{S = \emptyset}$

Exercice 5

Pour déterminer les points d'intersection d'une parabole d'équation $y = f(x)$ avec l'axe des abscisses, on commence par résoudre $f(x) = 0$.

Pour $y = x^2 - 4x + 3$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 = 4$ donc le trinôme a deux racines : $x_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1$.

La parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 3$ coupe donc deux fois l'axe des abscisses : au point $A(1; 0)$ et $B(3; 0)$.

Pour $y = 3x^2 + 2x + 3$: $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 3 = -32 < 0$ donc le trinôme n'a pas de racines et la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Pour $y = -x^2 - 9x - 20$: $\Delta = (-9)^2 - 4 \times (-1) \times (-20) = 81 - 80 = 1$ donc le trinôme a deux racines

$x_1 = \frac{9+1}{-2} = -5$ et $x_2 = \frac{9-1}{-2} = -4$ donc la parabole d'équation $y = -x^2 - 9x - 20$ coupe deux fois l'axe des abscisses : en $A(-5; 0)$ et $B(-4; 0)$.

Pour $y = x^2 + 2x$: $\Delta = 2^2 - 4 \times 0 = 4$ donc le trinôme a deux racines $x_1 = \frac{-2+\sqrt{4}}{2} = 0$ et $x_2 = \frac{-2-\sqrt{4}}{2} = -2$.

La parabole d'équation $y = x^2 + 2x$ coupe donc l'axe des abscisses en deux points : $O(0; 0)$ et $A(-2; 0)$.

Exercice 6

Pour tout réel x :

$$x^2 + 5x + 3 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$$

Donc $\boxed{S = \{0; 3\}}$

Pour tout réel t :

$$(2t + 1)(t - 4) = t^2 - 4t - 6 \Leftrightarrow 2t^2 - 8t + t - 4 = t^2 - 4t - 6 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$ donc il y a deux racines : $t_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ et $t_2 = \frac{3-1}{2} = 1$. D'où $\boxed{S = \{1; 2\}}$

Pour tout réel t :

$$(t + 2)^2 = 2t^2 + 5t - 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 4 = 2t^2 + 5t - 2 \Leftrightarrow -t^2 - t + 6 = 0$$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25$ donc il y a deux racines : $t_1 = \frac{1+5}{-2} = -3$ et $t_2 = \frac{1-5}{-2} = 2$. D'où $\boxed{S = \{-3; 2\}}$

Pour tout réel x ,

$$(x + 1)(x + 2) = (x + 3)(x + 4) + (x + 5)(x + 6) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x^2 + 7x + 12 + x^2 + 11x + 30$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 15x + 40 = 0$$

$\Delta = 15^2 - 4 \times 40 = 65$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-15+\sqrt{65}}{2}$ et $x_2 = \frac{-15-\sqrt{65}}{2}$. $\boxed{S = \left\{ \frac{-15+\sqrt{65}}{2}; \frac{-15-\sqrt{65}}{2} \right\}}$

Exercice 7

Pour $x^2 - 4x - 1$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) = 20$ donc il y a deux racines : $x_1 = \frac{4+\sqrt{20}}{2} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$ et

$$x_2 = 2 - \sqrt{5}. \text{ D'où } x^2 - 4x - 1 = \boxed{(x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})}$$

Pour $x^2 - x - 6$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) = 25$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$. D'où

$$x^2 - x - 6 = \boxed{(x - 3)(x + 2)}$$

Pour $3x^2 + 7x + 2$: $\Delta = 7^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-7+5}{6} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{-7-5}{6} = -2$. D'où

$$3x^2 + 7x + 2 = \boxed{3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 2)}$$

Pour $16x^2 + 24x + 9$: $\Delta = 24^2 - 4 \times 16 \times 9 = 0$ donc il y a une racine double $x_0 = \frac{-24}{32} = -\frac{3}{4}$ d'où

$$16x^2 + 24x + 9 = \boxed{16\left(x + \frac{3}{4}\right)^2}$$

Exercice 8

1) Il semble que la courbe de la fonction f soit une droite.

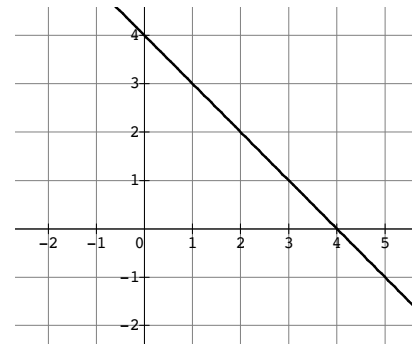
2) $-x^2 + 3x + 4$: $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 25$ donc le trinôme a deux racines

$$x_1 = \frac{-3+5}{-2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-3-5}{-2} = 4. \text{ D'où } -x^2 + 3x + 4 = \boxed{-(x + 1)(x - 4)}$$

3) Pour $x \neq -1$:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1} = \frac{-(x + 1)(x - 4)}{x + 1} = -(x - 4) = \boxed{-x + 4}$$

Cette expression est valable pour tout x différent de -1 .



Exercice 9

Pour $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8 > 0$: $\Delta = 3^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-8) = 25$ donc le trinôme est du signe de $a = \frac{1}{2}$ sauf entre les racines

$$x_1 = \frac{-3+5}{1} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-3-5}{1} = -8. \text{ D'où } \boxed{S =]-\infty; -8[\cup]2; +\infty[}$$

Pour $x^2 + 3x - 5 < x + 4$: pour tout réel x

$$x^2 + 3x - 5 < x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 9 < 0 :$$

Signe de $x^2 + 2x - 9$: $\Delta = 2^2 - 4 \times (-9) = 40$ donc $x^2 + 2x - 9$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{40}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{10}}{2} = -1 + \sqrt{10} \text{ et } x_2 = -1 - \sqrt{10}. \text{ D'où } \boxed{S =]-1 - \sqrt{10}; -1 + \sqrt{10}[}$$

Pour $2(x + 1)^2 - 3x > 2$: pour tout réel x ,

$$2(x + 1)^2 - 3x > 2 \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1) - 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x(2x + 1) > 0$$

Donc $2x^2 + x$ a deux racines 0 et $-\frac{1}{2}$ et est du signe de $a = 2$ sauf entre les racines. On obtient donc

$$\boxed{S =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[}$$

Pour $3x + \frac{1}{2x} \leq \frac{5}{2}$: pour tout réel x non nul

$$3x + \frac{1}{2x} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{6x^2 + 1}{2x} \leq \frac{5x}{2} \Leftrightarrow \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x} \leq 0$$

Signe de $6x^2 - 5x + 1$: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 = 1$ donc $6x^2 - 5x + 1$ est du signe de $a = 6$ sauf entre les racines

$x_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3}$. On construit ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$6x^2 - 5x + 1$	+	+	0	-	0	+
$2x$	-	0	+	+	+	+
$\frac{6x^2 - 5x + 1}{2x}$	-	+	0	-	0	+

D'où $S =]-\infty; 0[\cup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$

Exercice 10

La méthode de résolution classique n'aboutit pas car on obtient un discriminant dont il n'est pas facile d'avoir une racine carrée. On va donc considérer que x est un entier et raisonner par identification :

On suppose que x est un entier. Alors x^2 est également un entier.

$$x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{8} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x) = (x - 2)\sqrt{2}$$

Le membre de gauche est un entier donc cela doit également être le cas pour le membre de droite. Or la seule possibilité est que $x - 2 = 0$ (sinon, on aurait un nombre de la forme $k\sqrt{2}$ avec k un entier non nul...) et alors $x = 2$. Le membre de gauche est alors : $x^2 - 2x = 2^2 - 2 \times 2 = 0$. Les deux membres sont bien égaux.

L'équation a donc bien une solution entière qui est 2.

Exercice 11

1) Pour $x^2 - x - 6 : \Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) = 25$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$ donc $x^2 - x - 6 = \boxed{(x - 3)(x + 2)}$

Pour $2x^2 + 3x - 2 : \Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$ donc $2x^2 + 3x - 2 = 2 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) = \boxed{(2x - 1)(x + 2)}$

2) Pour $x \in \mathbb{R} - \left\{3; -2; \frac{1}{2}\right\}$:

$$\frac{2}{x^2 - x - 6} + \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x - 3)(x + 2)} + \frac{x}{(2x - 1)(x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2x - 1) + x(x - 3)}{(x - 3)(2x - 1)(x + 2)} = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 + x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

Pour $x^2 + x - 2 : \Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$.

En tenant compte de l'ensemble de définition, on obtient $S = \{1\}$

Partie B : Equations à paramètres, changement de variable, identification

Exercice 1

1) $g(1) = 1 + 5 - 12 + 6 = 0$ donc 1 est bien solution de $g(x) = 0$.

2) Pour tout réel x ,

$$(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$$

Par identification avec $g(x)$, on obtient :
$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 5 \\ c - b = -12 \\ -c = 6 \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = -6 \end{cases}$$

D'où $g(x) = (x - 1)(x^2 + 6x - 6)$

3) Signe de $x^2 + 6x - 6 : \Delta = 6^2 - 4 \times (-6) = 60$ donc $x^2 + 6x - 6$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{-6+\sqrt{60}}{2} = \frac{-6+2\sqrt{15}}{2} = -3 + \sqrt{15}$ et $x_2 = -3 - \sqrt{15}$.

x	$-\infty$	$-3 - \sqrt{15}$	$-3 + \sqrt{15}$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	-	-	0	+
$x^2 + 6x - 6$	+	0	-	0	+
$g(x)$	-	0	+	0	+

Exercice 2

Pour $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$: on pose $u = x^2$ donc $u^2 = x^4$ et alors on a $u^2 - 12u + 27 = 0$.

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 27 = 36$ donc il y a deux racines $u_1 = \frac{12+6}{2} = 9$ et $u_2 = \frac{12-6}{2} = 3$.

On a donc $x^2 = 9$ ou $x^2 = 3$ ce qui donne $x = 3$ ou $x = -3$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Finalement $S = \{3; -3; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$

Pour $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$: on pose $u = x^2$ et alors $u^2 + 3u - 4 = 0$.

$\Delta = 3^2 - 4 \times (-4) = 25$ donc il y a deux racines $u_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$ et $u_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$.

On a donc $x^2 = 1$ ou $x^2 = -4$ ce qui est impossible. Finalement $S = \{-1; 1\}$

Exercice 3

1) $2x^2 + 5x + 2$: $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-5-3}{4} = -2$.

D'où $S = \{-\frac{1}{2}; -2\}$

2) On résout dans $\mathbb{R} - \{1\}$: on pose $u = \frac{1}{x-1}$ d'où

$$\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2u^2 + 5u + 2 = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{1}{2} \text{ ou } u = -2 \text{ d'après la question 1}$$

Or :

$$u = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

$$u = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = -2 \Leftrightarrow x-1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Finalement, $S = \{-1; \frac{1}{2}\}$

3) On résout dans $[0; +\infty[$ et on pose $u = \sqrt{x}$ d'où $u^2 = x$.

$$x + 5\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 5u - 3 = 0$$

Pour $u^2 + 5u - 3$: $\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) = 37$ donc il y a deux racines $u_1 = \frac{-5+\sqrt{37}}{2}$ et $u_2 = \frac{-5-\sqrt{37}}{2}$.

On obtient donc $\sqrt{x} = \frac{-5+\sqrt{37}}{2}$ ou $\sqrt{x} = \frac{-5-\sqrt{37}}{2}$. Cette dernière équation n'a pas de solution car $\frac{-5-\sqrt{37}}{2} < 0$. D'où

$$\sqrt{x} = \frac{-5+\sqrt{37}}{2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{-5+\sqrt{37}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{25 - 10\sqrt{37} + 37}{4} = \frac{31 - 5\sqrt{37}}{2}$$

Finalement $S = \left\{\frac{31-5\sqrt{37}}{2}\right\}$

Exercice 4

1) Pour tout réel x ,

$$(x+3)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c = \boxed{ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+3b)x + 3c}$$

2) Par identification entre l'expression précédente et $f(x)$, on obtient $\begin{cases} a = 3 \\ b + 3a = -4 \\ c + 3b = -25 \\ 3c = 42 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} a = 3 \\ b = -13 \\ c = 14 \end{cases}$

D'où $f(x) = (x+3)(3x^2 - 13x + 14)$

3) Pour tout réel x ,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \text{ ou } 3x^2 - 13x + 14 = 0$$

Pour $3x^2 - 13x + 14 = 0$: $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 3 \times 14 = 1$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{13+1}{6} = \frac{7}{3}$ et $x_2 = \frac{13-1}{6} = 2$

On a donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = \frac{7}{3}$ ou $x = 2$

D'où $S = \{-3; 2; \frac{7}{3}\}$

Exercice 5

Pour $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3)$:

$$\Delta = (2(3m+1))^2 - 4(m+3) \times (m+3) = 4(9m^2 + 6m + 1) - 4(m^2 + 6m + 9) = 32m^2 - 32$$

Le trinôme a une racine double quand son discriminant est nul or

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 32m^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = -1$$

On a donc deux valeurs de m possible pour que le trinôme ait une racine double : 1 et -1.

Pour $m = 1$, le trinôme est $4x^2 + 8x + 4$. La racine double est $x_0 = -\frac{8}{8} = -1$

Pour $m = -1$, le trinôme est $2x^2 - 4x + 2$. La racine double est $x_0 = -\frac{-4}{4} = 1$.

Exercice 6

On considère le trinôme $x^2 - (2m + 3)x + m^2$.

Pour quelles valeurs de m ce trinôme a-t-il une racine double ? Calculer alors cette racine.

Exercice 7

1) 3 est solution de $2x^2 - (m + 2)x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \times 3^2 - (m + 2) \times 3 + m - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow 18 - 3m - 6 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 5$

On doit donc avoir $\boxed{m = 5}$ pour que 3 soit solution de l'équation.

2) Pour $m = 5$, l'équation est $2x^2 - 7x + 3 = 0$. $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25$ donc il y a bien deux racines
 $x_1 = \frac{7+5}{4} = 3$ et $x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$.

L'autre solution à l'équation est donc $\boxed{\frac{1}{2}}$

Exercice 8

Pour $x \neq 0$:

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

Pour $x^2 - 3x + 1$: $\Delta = (-3)^2 - 4 = 5$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

On a donc $\boxed{S = \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}}$

Pour $x \in \mathbb{R} - \{1; 2\}$

$$\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = -1 \Leftrightarrow 4(x-2) - 3(x-1) = -(x-1)(x-2) \Leftrightarrow 4x - 8 - 3x + 3 = -(x^2 - 2x - x + 2)$$
$$\Leftrightarrow x - 5 = -x^2 + 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

Pour $x^2 - 2x - 3$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-3) = 16$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$

Finalement $\boxed{S = \{-1; 3\}}$

Pour $x \in \mathbb{R} - \{0; -m\}$ avec m un réel quelconque

$$\frac{2x+m}{x} - \frac{2x}{x+m} = 2 \Leftrightarrow (2x+m)(x+m) - 2x^2 = 2x(x+m)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2mx + mx + m^2 - 2x^2 = 2x^2 + 2mx \Leftrightarrow -2x^2 + mx + m^2 = 0$$

Pour $-2x^2 + mx + m^2$: $\Delta = m^2 - 4 \times (-2) \times m^2 = 9m^2$.

On a donc trois cas :

Soit $m = 0$ et alors $\Delta = 0$ et il y a une racine double $x_0 = 0$ qui est une valeur interdite...

Soit $m > 0$, $\sqrt{\Delta} = 3m$ et alors il y a deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-m+3m}{-4} = -\frac{m}{2}$ et $x_2 = \frac{-m-3m}{-4} = m$

Ces deux solutions ne sont pas valeurs interdites car $m \neq 0$.

Soit $m < 0$, $\sqrt{\Delta} = -3m$ et alors il y a deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-m+3(-m)}{-4} = m$ et $x_2 = \frac{-m-3(-m)}{-4} = -\frac{m}{2}$

Finalement, soit $m = 0$ et alors $\boxed{S = \emptyset}$, soit $m \neq 0$ et alors $\boxed{S = \left\{ m; -\frac{m}{2} \right\}}$

Exercice 9

1) En noir : courbe de f ; en rouge : courbe de g .

2) Graphiquement l'équation a une unique solution 5. Cela correspond à l'abscisse du point d'intersection entre les deux courbes.

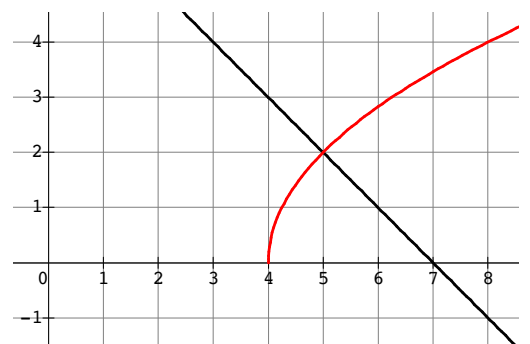
3) On résout dans $[4; +\infty[$ car f est définie sur \mathbb{R} mais g n'est définie que sur $[4; +\infty[$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 7 - x = 2\sqrt{x-4} \Leftrightarrow (7-x)^2 = 4(x-4) \text{ et } 7-x > 0$$
$$\Leftrightarrow 49 - 14x + x^2 = 4x - 16 \text{ et } x < 7 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 65 = 0 \text{ et } x < 7$$

Pour $x^2 - 18x + 65$: $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 65 = 64$ donc il y a deux racines

$$x_1 = \frac{18+8}{2} = 13 \text{ et } x_2 = \frac{18-8}{2} = 5$$

Comme on doit aussi avoir $x < 7$, la seule solution possible est bien 5.



Exercice 10

$$1) h(x) = x^2 - ax + 3 : \Delta = a^2 - 4 \times 3 = a^2 - 12$$

h a deux racines distinctes si et seulement si son discriminant est strictement positif donc $a^2 - 12 > 0$. Or $a^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow a^2 > 12 \Leftrightarrow a > \sqrt{12}$ ou $a < -\sqrt{12} \Leftrightarrow a > 2\sqrt{3}$ ou $a < -2\sqrt{3}$

h a deux racines distinctes pour $a \in]-\infty; -2\sqrt{3}[\cup]2\sqrt{3}; +\infty[$

2) h est une racine double si et seulement si son discriminant est nul donc $a^2 = 12$, autrement dit pour

$$a = \{2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\}$$

3) h n'a pas de racines si et seulement si son discriminant est strictement négatif donc $a^2 - 12 < 0$ ou encore $a^2 < 12$. On a donc $a \in]-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}[$

4) Le minimum de h est strictement inférieur à -1 si et seulement si l'inéquation $h(x) < -1$ a au moins une solutions. Or

$$h(x) < -1 \Leftrightarrow x^2 - ax + 4 < 0$$

Cette inéquation a au moins une solution si le discriminant de $x^2 - ax + 4$ est positif ou nul. En effet, $x^2 - ax + 4$ est du signe de 1 sauf entre les racines, si elles existent.

Or $\Delta = a^2 - 16$ donc on doit résoudre $a^2 - 16 \geq 0$ ce qui donne $a \in]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$

Partie C : Déterminer un trinôme sous conditions

Exercice 1

$$1) A \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 3 = a \times 0^2 + b \times 0 + c \Leftrightarrow c = 3$$

$$B \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 5 = a + b + c$$

$$C \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 15 = 4a + 2b + c$$

Les points A, B et C appartiennent à \mathcal{P} si et seulement si
$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 15 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b = 2 \\ 4a + 2b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 2 - a \\ 4a + 2(2 - a) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 2 - a \\ 2a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -2 \\ a = 4 \end{cases}$$

3) La parabole \mathcal{P} a pour équation $y = 4x^2 - 2x + 3$.

Pour déterminer l'intersection de \mathcal{P} avec l'axe des abscisses, on cherche les points de \mathcal{P} d'ordonnée 0 donc on résout $4x^2 - 2x + 3 = 0$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 \times 3 = -44 < 0$ donc l'équation n'a pas de solution et la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Exercice 2

$$1) A \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = a + b + c$$

$$B \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -6 = 4a + 2b + c$$

$$C \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -\frac{25}{2} = 9a + 3b + c$$

Les points A, B et C appartiennent à \mathcal{P} si et seulement si
$$\begin{cases} a + b + c = -\frac{3}{2} \\ 4a + 2b + c = -6 \\ 9a + 3b + c = -\frac{25}{2} \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} a + b + c = -\frac{3}{2} \\ 4a + 2b + c = -6 \\ 9a + 3b + c = -\frac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{3}{2} - a - b \\ 4a + 2b - \frac{3}{2} - a - b = -6 \\ 9a + 3b - \frac{3}{2} - a - b = -\frac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{3}{2} - a - b \\ b = -\frac{9}{2} - 3a \\ 8a + 2\left(-\frac{9}{2} - 3a\right) = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{3}{2} - a - b \\ b = -\frac{9}{2} - 3a \\ 2a = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -\frac{3}{2} \\ a = -1 \end{cases}$$

3) L'équation de la parabole est $y = -x^2 - \frac{3}{2}x + 1$. Pour déterminer les points d'intersection de cette parabole avec l'axe des abscisses, on résout $-x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$.

$$\Delta = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times (-1) = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4} \text{ donc l'équation a deux solutions } x_1 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{-2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Finalement la parabole \mathcal{P} coupe deux fois l'axe des abscisses : en $D(-2; 0)$ et $E\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

Exercice 3

1) Pour tout réel x : $g(x) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 - 1 + 2 = \boxed{(x - 1)^2 + 1}$

$$h(x) = 2x^2 - 4x + 3 = 2\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) = 2\left[(x - 1)^2 - 1 + \frac{3}{2}\right] = \boxed{2(x - 1)^2 + 1}$$

2) Pour tout réel x , $(x - 1)^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif donc $(x - 1)^2 + 1 \geq 1$ ce qui signifie que $g(x) \geq 1$. Or $f(x) \geq g(x)$ ce qui signifie que $\boxed{f(x) \geq 1}$

3) Pour $x = 1$, on a $g(1) \leq f(1) \leq h(1)$ or $g(1) = 1$ et $h(1) = 1$ donc $\boxed{f(1) = 1}$

4) D'après les questions précédentes, 1 est le minimum de f car f est toujours supérieur à 1 et 1 est atteint en 1. La forme canonique de f est donc $f(x) = a(x - 1)^2 + 1$.

De plus $f(11) = 181$ or $a(11 - 1)^2 + 1 = 181 \Leftrightarrow 100a = 180 \Leftrightarrow a = 1,8$.

On trouve donc $\boxed{f(x) = 1,8(x - 1)^2 + 1}$

En développant, on obtient $\boxed{f(x) = 1,8x^2 - 3,6x + 2,8}$

Partie D : Variations, extremum, propriété de la courbe, position relative

Exercice 1

$f: x \mapsto 3x^2 + 4$: f est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = 3 > 0$ donc f est décroissante puis croissante et a donc un minimum. Il est atteint en 0 car $-\frac{b}{2a} = 0$.

Pour tout réel x , $g(x) = -2(x^2 - 8x + 16) + 8 = -2x^2 + 16x - 24$

g est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = -2 < 0$ donc g est croissante puis décroissante et admet donc un maximum. Il est atteint en 4 car $-\frac{b}{2a} = -\frac{16}{-4} = 4$.

h est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = -2 < 0$ donc h admet un maximum. Il est atteint en 2 car $-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-4} = 2$.

Exercice 2

f est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = 1 > 0$ donc f est décroissante puis croissante et admet donc un minimum. Il est atteint en -2 car $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$. De plus $f(-2) = (-2)^2 + 4 \times (-2) - 6 = -10$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Variations de f			

g est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = -\frac{1}{2} < 0$ donc g est croissante puis décroissante et admet donc un maximum. Il est atteint en 5 car $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{-1} = 5$. De plus $g(5) = -\frac{25}{2} + 25 = \frac{25}{2}$.

x	$-\infty$	5	$+\infty$
Variations de g			

Exercice 3

1) f est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = 3 > 0$ donc f est décroissante puis croissante. Elle admet donc un minimum qui est atteint en -1 car $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{6} = -1$. De plus $f(-1) = 3 - 6 - 7 = -10$. Mais aussi $f(-5) = 3 \times 25 - 30 - 7 = 38$ et $f(3) = 3 \times 9 + 18 - 7 = 38$.

x	-5	-1	3
Variations de f	38	-10	38

2) Le minimum de f sur $[-5; 3]$ est donc -10 et le maximum est 38 .

3)

a. $f(x) = -10 \Leftrightarrow x = -1$ car -10 est le minimum de f et il n'est atteint qu'en -1 . $S = \{-1\}$

b. $f(x) = 17 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 7 = 17 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

Pour $x^2 + 2x - 8$: $\Delta = 2^2 - 4 \times (-8) = 36$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$.

D'où $S = \{-4; 2\}$

c. $f(x) < 17 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 < 0$ or $x^2 + 2x - 8$ est du signe de 1 sauf entre les racines -4 et 2 donc

$S =]-4; 2[$

d. Comme le minimum de f est -10 et que $-10 > -20$, on a $f(x) > -20$ pour tout $x \in [-5; 3]$ donc

$S = [-5; 3]$

Exercice 4

1) Pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 + 5x + \frac{7}{2} > -x^2 - 3x \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + \frac{7}{2} > 0$$

Pour $2x^2 + 8x + \frac{7}{2}$: $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times \frac{7}{2} = 36$ donc $2x^2 + 8x + \frac{7}{2}$ est du signe de 2 sauf entre les racines

$$x_1 = \frac{-8+6}{4} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-8-6}{4} = -\frac{7}{2} \text{ donc } S =]-\infty; -\frac{7}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

2) Sur $]-\infty; -\frac{7}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$, $f(x) > g(x)$ donc \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g .

Sur $]-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}[$, \mathcal{C}_f est donc en dessous de \mathcal{C}_g .

Exercice 5

1) f est une fonction rationnelle. Elle est définie lorsque son dénominateur est non nul.

Pour $x^2 + x + 1$: $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$ donc $x^2 + x + 1$ n'a pas de racines et est donc toujours non nul. f est donc bien définie sur \mathbb{R} .

2) Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) < 5 \Leftrightarrow \frac{4x^2-5}{x^2+x+1} < 5 \Leftrightarrow 4x^2 - 5 < 5(x^2 + x + 1) \text{ car } x^2 + x + 1 \text{ est toujours du signe de } a = 1 \text{ donc positif} \\ \Leftrightarrow -x^2 - 5x - 10 < 0$$

Pour $-x^2 - 5x - 10$: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = -15 < 0$ donc $-x^2 - 5x - 10$ est toujours du signe de $a = -1$ donc négatif. L'inégalité précédente est donc toujours vraie, tout comme $f(x) < 5$

De même : $f(x) > -6 \Leftrightarrow 4x^2 - 5 > -6(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow 10x^2 + 6x + 1 > 0$

Pour $10x^2 + 6x + 1$: $\Delta = 6^2 - 4 \times 10 = -4 < 0$ donc $10x^2 + 6x + 1$ est toujours du signe de $a = 10$ donc positif. L'inégalité précédente est donc toujours vraie tout comme $f(x) > -6$

Exercice 6

1) Commençons par calculer t^2 puis t^3 :

$$t^2 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \right)^2 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} \right)^2 - 2\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} + \left(\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \right)^2$$

$$t^3 = t^2 \times t = \left[\left(\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} \right)^2 - 2\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} + \left(\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \right)^2 \right] \left(\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \right)$$

$$= (\sqrt{5} + 2) - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)^2(\sqrt{5} - 2)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)^2} - (\sqrt{5} - 2)$$

$$\begin{aligned}
&= 4 - 3\sqrt[3]{(5 + 4\sqrt{5} + 4)(\sqrt{5} - 2)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(5 - 4\sqrt{5} + 4)} \\
&= 4 - 3\sqrt[3]{9\sqrt{5} - 18 + 20 - 8\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{9\sqrt{5} - 20 + 18 - 8\sqrt{5}} \\
&= 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}
\end{aligned}$$

Donc, on a bien $t^3 + 3t - 4 = 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} + 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}\right) - 4 = 0$

2) Pour tout réel t ,

$$(t - 1)(at^2 + bt + c) = at^3 + bt^2 + ct - at^2 - bt - c = at^3 + (b - a)t^2 - (c - b)t - c$$

Par identification avec $t^3 + 3t - 4$, on obtient

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 3 \\ -c = -4 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$$

Donc $(t - 1)(t^2 + t + 4) = t^3 + 3t - 4$

3) $t^3 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 4) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t^2 + t + 4 = 0$

Pour $t^2 + t + 4$: $\Delta = 1^2 - 4 \times 4 = -15$ donc il n'y a pas de racines.

Finalement, la seule solution de $t^3 + 3t - 4 = 0$ est 1 donc $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1$