plus de bonnes notes
le soutien scolaire connecté

17/01/23.

TG : Spé-maths.

n°20 :

1) a) $u_1 = \dfrac{u_0+2}{2u_0+1} = \dfrac{2+2}{2\times 2+1} = \dfrac{4}{5} = 0{,}800$

De même : $u_2 = \dfrac{14}{13} \simeq 1{,}077$.

$u_3 = \dfrac{40}{41} \simeq 0{,}976$.

$u_4 = \dfrac{122}{121} \simeq 1{,}008$.

b) 1er cas $n = 0$.

- $(-1)^0 = 1$
- $u_0 - 1 = 2-1 = 1$

} signe identique.

2ème cas : $n = 1$.

- $(-1)^1 = -1$
- $u_1 - 1 = \dfrac{4}{5} - 1 = -\dfrac{1}{5}$

} m̂ sgn.

3ème cas : $n = 2$.

- $(-1)^2 = 1$
- $u_2 - 1 = \dfrac{14}{13} - 1 = \dfrac{1}{13}$

} m̂ sgn.

4ème cas : $n = 3$.

- $(-1)^3 = -1$
- $u_3 - 1 = \dfrac{40}{41} - 1 = \dfrac{-1}{41}$

} m̂ sgn.

5ème cas : $n = 4$
- $(-1)^4 = 1$
- $u_4 - 1 = \dfrac{122}{121} - 1 = \dfrac{1}{121}$

} m̂ sgn.

1) c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n+2}{2u_n+1} - \frac{1\times(2u_n+1)}{1\times(2u_n+1)}$$

$$= \frac{u_n+2-2u_n-1}{2u_n+1}$$

$$\boxed{u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n+1}{2u_n+1}}$$

d) Démontrons par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{(-1)^n \text{ et } u_n - 1 \text{ ont le m̂ signe}}$

P_n :

Ini : déjà fait.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que :

$(-1)^n$ et $u_n - 1$ ont le m̂ sgn.

Démontrons que $(-1)^{n+1}$ et $u_{n+1} - 1$ ont le même sgn.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n+1}{2u_n+1}$$

$$= \frac{-(u_n-1)}{2u_n+1}$$

Or $u_n > 0$

$2u_n + 1 > 0$

Donc $u_{n+1} - 1$ est de signe contraire à $u_n - 1$ de plus $(-1)^{n+1}$ est de signe contraire à $(-1)^n$ car $(-1)^{n+1} = (-1) \times (-1)^n$.

Or $(-1)^n$ et $u_n - 1$ ont le m̂ signe.

Ccl: (P_n) est initialisée et héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1$ et $(-1)^n$ sont de m̂ signe.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$ $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1} + 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n+2-2u_n-1}{2u_n+1}}{\frac{u_n+2+2u_n+1}{2u_n+1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{-u_n+1}{\cancel{2u_n+1}} \times \frac{\cancel{2u_n+1}}{3u_n+3}$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{-u_n+1}{3u_n+3}}$$

$x+2=3$.

b) $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \dfrac{-u_n+1}{3u_n+3}$

$$v_{n+1} = \frac{-1(u_n-1)}{3(u_n+1)}$$

$$v_{n+1} = -\frac{1}{3} \times \frac{u_n-1}{u_n+1}$$

$$\boxed{v_{n+1} = -\frac{1}{3} \times v_n}$$

(v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

et de premier terme :

$$v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

c) $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

$$x^2 - x$$
$$x \times x + x \times (-1)$$
$$x(x-1)$$

$$v_n(u_n+1) = u_n - 1.$$

$$v_n u_n + v_n = u_n - 1.$$

$$v_n u_n - u_n = -1 - v_n.$$

$$u_n(v_n - 1) = -1 - v_n.$$

$$u_n = \frac{-1-v_n}{v_n-1} = \frac{1+v_n}{1-v_n}$$

$$u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$$

$$u_n = \frac{1+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < -\frac{1}{3} < 1.$$

Par quotient et somme et produit, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \underline{\underline{1}}.$

n°22

$]0;+\infty[$.

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car c'est une fonction rationnelle.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\times\left(1-\frac{7}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{x^2-7}{x^2}\right)$$