Dimanche 24 septembre 2024

TG: Spé - maths.

n°22.

$f^{\circ}$ rationnelle : $Q(x) = \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$

1) $f$ est une fonction rationnelle car elle est le quotient de deux polynômes.

Elle est dérivable sur son ensemble de définition : $]0;+\infty[$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

$f(x) = k \times u(x)$

$f'(x) = k \times u'(x)$

$7 \times \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 \times x^2}{1 \times x^2} - \frac{7}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^2 - 7}{x^2} = \frac{x^2-7}{2x^2}$$

On en déduit les variat° de $f$ à l'aide du signe de $f'(x)$.

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{7}$ $\simeq 2{,}6$ | $u_n$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variat° de $f$ | ‖ | $\searrow$ | $f(\sqrt{7})$ | $\nearrow$ | |

Ceci prouve que $f$ admet un minimum sur $]0;+\infty[$ atteint en $\sqrt{7}$.

Démontrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq \sqrt{7})$ $P_n$

$P_n$ : $U_n \geq \sqrt{7}$

I

$U_0 = 3$

$3 \geq \sqrt{7} \iff U_0 \geq \sqrt{7}$

$P_n$ est vraie au rang $0$.

H

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P_n$ est vraie et montrons que $P_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire $P_{n+1}$ : $U_{n+1} \geq \sqrt{7}$.

HR : $U_n \geq \sqrt{7}$

On applique la fonction $f$ qui est strictement croissante sur $[\sqrt{7};+\infty[$

$$f(U_n) \geq f(\sqrt{7})$$

$$\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{7}{U_n}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \frac{7}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{7}{U_n}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{14}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{7}{U_n}\right)}_{U_{n+1}} \geq \frac{7 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\cancel{7}\sqrt{7}}{\cancel{7}} = \sqrt{7}$$

$$U_{n+1} \geq \sqrt{7}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \geq \sqrt{7}$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right) - u_n$

$$= \frac{u_n \times u_n}{2 \times u_n} + \frac{7}{2u_n} - \frac{u_n \times 2u_n}{1 \times 2u_n}$$

$a^2 - b^2$
$(a+b)(a-b)$

$$= \frac{-u_n^2 + 7}{2u_n} = \frac{\sqrt{7}^2 - u_n^2}{2u_n}$$

$$= \frac{\underbrace{(\sqrt{7} - u_n)}_{\ominus}\underbrace{(\sqrt{7} + u_n)}_{\oplus}}{\underbrace{2u_n}_{\oplus}} \leq 0$$

$\sqrt{7} > 0$ $\qquad$ $\sqrt{7} \leq u_n$

$u_n > 0$ $\qquad$ $\sqrt{7} - u_n \leq 0$

(Donc $(u_n)$ est décroissante.)

b) $(u_n)$ est décroissante et minorée par $\sqrt{7}$ donc elle est convergente.

c) $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{7}{\ell}\right)$ $\qquad$ $\ell \neq 0$

$$\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{7}{2\ell}$$

$$0 = -\frac{\ell \times 2\ell}{1 \times 2\ell} + \frac{\ell \times \ell}{2 \times \ell} + \frac{7}{2\ell}$$

Un quotient $\dfrac{A}{B} = 0$

$$0 = \frac{-2\ell^2 + \ell^2 + 7}{2\ell}$$

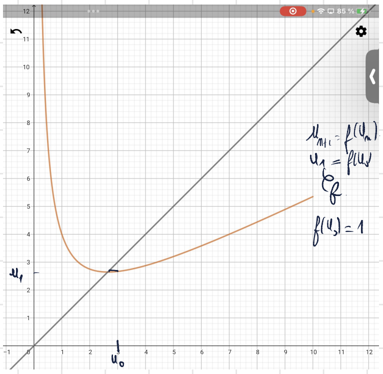
$\iff A = 0$ et $B \neq 0$

$$0 = \frac{-\ell^2 + 7}{2\ell}$$

$-\ell^2 + 7 = 0$ | $\ell^2 = 7$

$-\ell^2 = -7$ | $\ell = \sqrt{7}$ ou ~~$\ell = -\sqrt{7}$~~. $u_n > 0$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{7}.}$$




3. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7}$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n} - \frac{2\sqrt{7} \times u_n}{1 \times u_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2 + 7 - 2u_n\sqrt{7}}{u_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$$

4)b) $\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2 \end{cases}$  $P_n : u_n - \sqrt{7} \leq d_n$

Initialisation : D'une part $u_0 - \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7} \simeq 0{,}35$

D'autre part $d_0 = 1$

$\boxed{u_0 - \sqrt{7} \leq d_0}$  $P_0$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

On veut montrer que $u_{n+1} - \sqrt{7} \leq d_{n+1}$

H.R : $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.  on applique la f° carré croissante sur $[0 ; +\infty[$

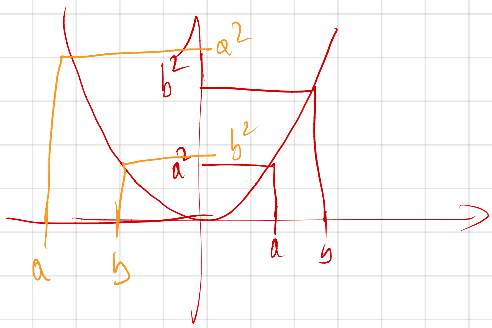
$(u_n - \sqrt{7})^2 \leq d_n^2$

$\downarrow \times \frac{1}{2u_n}$

$$\frac{1}{2}\,\frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n} \leq \frac{d_n^2}{2} \times \frac{1}{u_n} \leq \frac{d_n^2}{2} \qquad \left(\frac{\frac{d_n^2}{2}}{u_n} \leq \frac{d_n^2}{2}\right)$$

$$\boxed{u_{n+1} - \sqrt{7} \leq d_{n+1}}$$

CCl : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.




$-3 < -2$
$(-3)^2 > (-2)^2$

$2 < 3$
$2^2 < 3^2$

$\frac{2}{0{,}5} = 4$  $\frac{2}{0{,}9} = 2{,}2$

$\frac{2}{0{,}1} = 20$  $\frac{2}{1} = 2$

$\frac{2}{2} = 1$

$J_0 = 300$ mg/L    Tant que $t_x > 50$ mg/L

$J_1 = 150$

$J_3 = 75$

$J_4 = 37,5$

b) $d_5 \leq 10^{-9}$

$u_n - \sqrt{7} \leq d_n$

$u_5 - \sqrt{7} \leq d_5 \leq 10^{-9}$

$\leq 0,000\,000\,001$

$u_5 \simeq \sqrt{7}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ | $\lim f(x)$

$x \to +\infty$

$x \to -\infty$

$x \to 3^+$

$x \to 3^-$