

Exercice 11 : a; b; g.

$$u_n = \frac{2n+1}{n+325} = \frac{x(2+\frac{1}{n})}{x(1+\frac{325}{n})} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{325}{n}}$$

On  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$  } Par quotient de limites,  
 et  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{325}{n} = 1$  }  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$

b)  $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1-n} = \frac{x \cdot n (2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})}{n (\frac{1}{n} - 1)}$   
 $= \frac{n (2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})}{\frac{1}{n} - 1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} = 2$  } Par produit de limites,  
 on a:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n (2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}) = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 1 = -1$

Par quotient de limites:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ .

g)  $u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(1) \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$

$u_n = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

On  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ . } Par quotient  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$  }  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

m<sup>o</sup> 20.

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

$u_1 = \frac{2+2}{2 \times 2 + 1} = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} = 0,800$

$u_2 = \frac{0,8+2}{2 \times 0,8+1} = \frac{2,8}{2,6} = 1,077 = \frac{14}{13}$

$u_3 = \frac{\frac{14}{13} + 2}{2 \times \frac{14}{13} + 1} = \frac{40}{41} \approx 0,976$

$u_4 = \frac{\frac{40}{41} + 2}{2 \times \frac{40}{41} + 1} = \frac{122}{121} \approx 1,008$

b)

n	$(-1)^n$	$u_{n-1}$	Signe
0	1	1	$\hat{m}$
1	-1	$-\frac{1}{5}$	$\hat{m}$
2	1	$\frac{1}{13}$	$\hat{m}$
3	-1	$-\frac{1}{41}$	$\hat{m}$
4	1	$\frac{1}{121}$	$\hat{m}$

c) Soit  $m \in \mathbb{N}$

$u_{m+1} - 1 = \frac{u_{m+2}}{2u_{m+1}} - \frac{1 \times 2u_{m+1}}{1(2u_{m+1})}$

$= \frac{u_{m+2} - (2u_{m+1})}{2u_{m+1}}$

$= \frac{u_{m+2} - 2u_{m+1}}{2u_{m+1}} = \frac{-u_{m+1}}{2u_{m+1}}$

d) Soit  $m \in \mathbb{N}$ , on veut  
prouver que :

$P_m \Leftrightarrow \binom{m}{m} - 1$  et  $(-1)^m$  ont le même signe  $\Rightarrow$

Initialisation: Au rang  $n=0$ . On a:

$$\left. \begin{array}{l} \binom{0}{0} - 1 = 2 - 1 = 1 \rightarrow \oplus \\ (-1)^0 = 1 \rightarrow \oplus \end{array} \right\} \hat{m} \text{ signe.}$$

Hérédité: Soit  $m \in \mathbb{N}$ , on suppose que

$\binom{m}{m} - 1$  et  $(-1)^m$  ont le même signe.

Montrons que  $\binom{m+1}{m+1} - 1$  et  $(-1)^{m+1}$  ont le même signe.

$$(-1)^{m+1} = -1 \times (-1)^m \text{ donc } (-1)^{m+1} \text{ est l'opposé de } (-1)^m.$$

$$\binom{m+1}{m+1} - 1 = \frac{-\binom{m+1}{m+1}}{2\binom{m+1}{m+1}} = -1 \times \left( \frac{\binom{m+1}{m+1}}{2\binom{m+1}{m+1}} \right)$$

$$\binom{m+1}{m+1} - 1 \text{ est l'opposé de } \frac{\binom{m+1}{m+1}}{2\binom{m+1}{m+1}}$$

Or  $(-1)^m$  et  $\left( \frac{\binom{m+1}{m+1}}{2\binom{m+1}{m+1}} \right)$  sont de même signe.

donc  $(-1)^{m+1}$  et  $\left( \frac{\binom{m+1}{m+1}}{2\binom{m+1}{m+1}} - 1 \right)$  sont de même signe également.

# Suites numériques – Fiche de cours

## 1. Le raisonnement par récurrence

Soit une propriété  $(P_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  ou un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$

- Initialisation : on étudie si la propriété est vraie au rang initial
- Hérédité : on suppose qu'il existe un entier  $n \geq n_0$  tel que  $P_n$  soit vraie et l'on démontre que  $P_{n+1}$  l'est aussi
- Conclusion : d'après le principe du raisonnement par récurrence la propriété  $(P_n)$  est vraie pour tout entier naturel (ou un sous ensemble de  $\mathbb{N}$ )

## 2. Inégalité de Bernoulli

$$\forall a > 0 \quad (1+a)^n \geq 1+na$$

## 3. Limite d'une suite

### 3.1 Limite finie

Une suite  $(u_n)$  admet une limite  $L$  si l'on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$

Une suite  $(u_n)$  a pour limite  $L$  si  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  à partir duquel :  
 $\forall a > 0 \quad u_n \in ]L-a; L+a[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

### 3.2 Limite infinie

Une suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$  si  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  à partir duquel :  
 $\forall A > 0 \quad u_n \in ]A; +\infty[$

Une suite  $(u_n)$  a pour limite  $-\infty$  si  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  à partir duquel :  
 $\forall A > 0 \quad u_n \in ]-\infty; -A[$

Lorsque  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm \infty$  on dit que  $(u_n)$  diverge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$$

## 3.3 Limites par encadrement ou comparaison

a. Théorème d'encadrement (dit des gendarmes)

Pour  $v_n \leq u_n \leq w_n$  si  $\lim_{x \rightarrow \infty} v_n = L$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} w_n = L$  alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} u_n = L$

b. Théorèmes de comparaison

Pour  $u_n \geq v_n$  si  $\lim_{x \rightarrow \infty} v_n = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Pour  $u_n \leq w_n$  si  $\lim_{x \rightarrow \infty} w_n = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} u_n = -\infty$

## 3.4 Opérations sur les limites

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$$

$$n^2 + (-2n)$$

Limite d'une somme

Si $(u_n)$ a pour limite	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $(v_n)$ a pour limite	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

Limite d'un produit

$$\frac{1}{n} \times n$$

Si $(u_n)$ a pour limite	$l$	$l \neq 0$	$0$	$\infty$
Si $(v_n)$ a pour limite	$l'$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$l \times l'$	$\infty^*$	F. ind.	$\infty^*$

$$u_n = n^2 \times 2^n$$

### Limite d'un quotient

Si $(u_n)$ a pour limite	$l$	$l \neq 0$	0	$l$	$\infty$	$\infty$
Si $(v_n)$ a pour limite	$l' \neq 0$	0 <sup>(1)</sup>	0	$\infty$	$l'$	$\infty$
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	$\infty^*$	F. ind.	0	$\infty^*$	F. ind.

### 3.5 Limites des suites géométriques

**Théorème 3 :** Soit  $q$  un réel. On a les limites suivantes :

- Si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si  $q = 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si  $-1 < q < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si  $q \leq -1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$  n'existe pas

### 3.6 Convergence des suites

**Définition 4 :** On dit que la suite  $(u_n)$  est majorée si, et seulement si, il existe un réel  $M$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$$

On dit que la suite  $(u_n)$  est minorée si, et seulement si, il existe un réel  $m$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$$

Si  $(u_n)$  est majorée et minorée, on dit que la suite est bornée.

**Théorème 4 : Divergence**

- Si une suite  $(u_n)$  est croissante et non majorée alors la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- Si une suite  $(u_n)$  est décroissante et non minorée alors la suite  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

**Théorème 5 : Convergence**

- Si une suite  $(u_n)$  est croissante et majorée alors la suite  $(u_n)$  converge.
- Si une suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée alors la suite  $(u_n)$  converge.

$$f(x) = d \frac{\sin(x)}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2^n}{3n + 1} = \frac{\infty \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)}$$

