Exercices : 29/10/23

Exo 1 :

1) Calculer la valeur absolue de :

$$\begin{cases} a = -8 \times 10^{-4} \\ b = 6 - 3\sqrt{7}. \end{cases}$$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ si } f > 0. \\ -f(x) \text{ si } f < 0. \end{cases}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\begin{cases} |3-x| \\ |x+1,5|. \end{cases}$$

$|-3| = -(-3) = +3.$

$|\pi| = \pi \quad \pi > 0.$

$|-10| = -(-10) = 10.$

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{R}^+ \\ -x \text{ si } x \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

Exercice 2 :

Représenter graphiquement $f(x) = |5-x|$.

Résoudre $f(x) = 1$.

Exercice 3 :

Soient f et g les fonctions définies par :

$$\begin{cases} f(x) = |x| - 2 \\ g(x) = |x-2| \end{cases}$$

Résoudre $f(x) = g(x)$.

(tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ avant).

$\bullet\ a = -8 \times 10^{-4}$.

$\bullet\ |a| = |-8 \times 10^{-4}| = -(-8 \times 10^{-4})$

$= +8 \times 10^{-4}$.

$b = 6 - 3\sqrt{7}$

$b < 0$.

Donc $|b| = -b = -(6 - 3\sqrt{7})$

$|b| = -6 + 3\sqrt{7}$.

2) $|3-x|$, $x \in \mathbb{R}$.

$3 - x \geq 0$.

$\Leftrightarrow -x \geq -3$

$\Leftrightarrow x \leq 3$.

$$\begin{cases} |3-x| = 3-x \text{ si } x \in]-\infty ; 3]. \\ |3-x| = -(3-x) = x-3) \text{ si } x \in [3 ; +\infty[. \end{cases}$$

$x + \underbrace{1,5} \geq 0$.

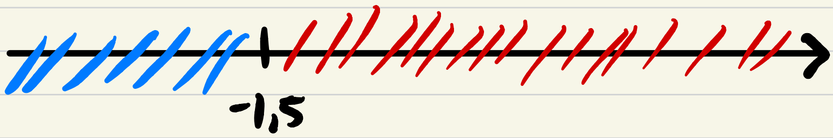
$x + \cancel{1,5} \cancel{-1,5} \geq 0 \underbrace{-1,5}$.

$|x+1,5|$

$x+1,5 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -1,5.$

$[-1,5;+\infty[$



$$\begin{cases} |x+1,5| = x+1,5 \text{ sur } [-1,5;+\infty[. \\ |x+1,5| = -x-1,5 \text{ sur }]-\infty;-1,5]. \end{cases}$$

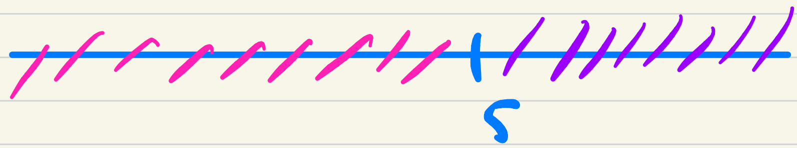
Exo 2 :

$|5-x|.$

$5-x \geq 0$

$\Leftrightarrow -x \geq -5$

$\Leftrightarrow x \leq 5.$

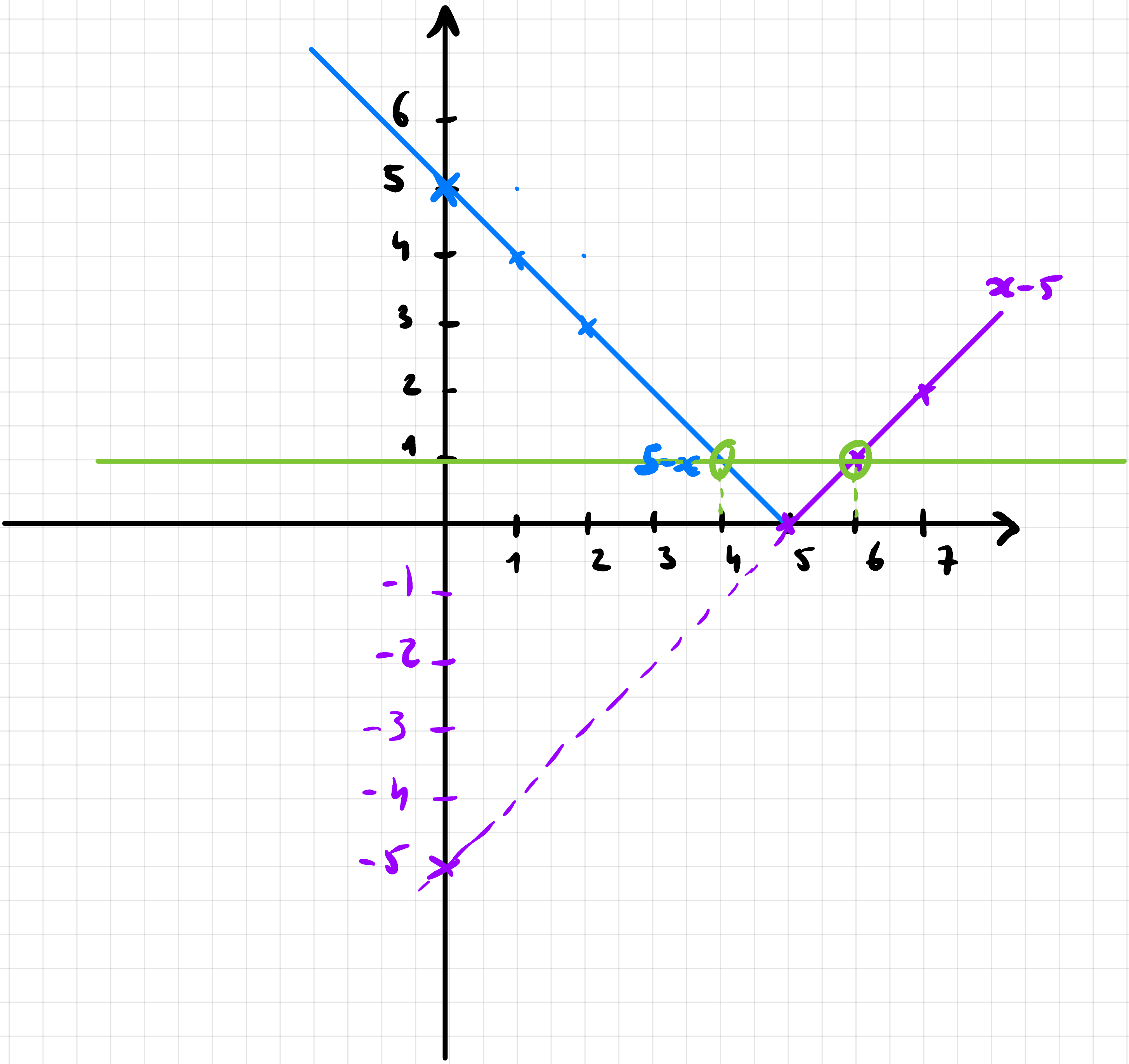


$$|5-x| = \begin{cases} 5-x \text{ si } x \in]-\infty;5]. \\ x-5 \text{ si } x \in [5;+\infty[\end{cases}$$

Résoudre $f(x) = 1$ admet 2 solutions : $x=4$ et $x=6$.

$|5-4| = |1| = 1$

$|5-6| = |-1| = -(-1) = 1.$



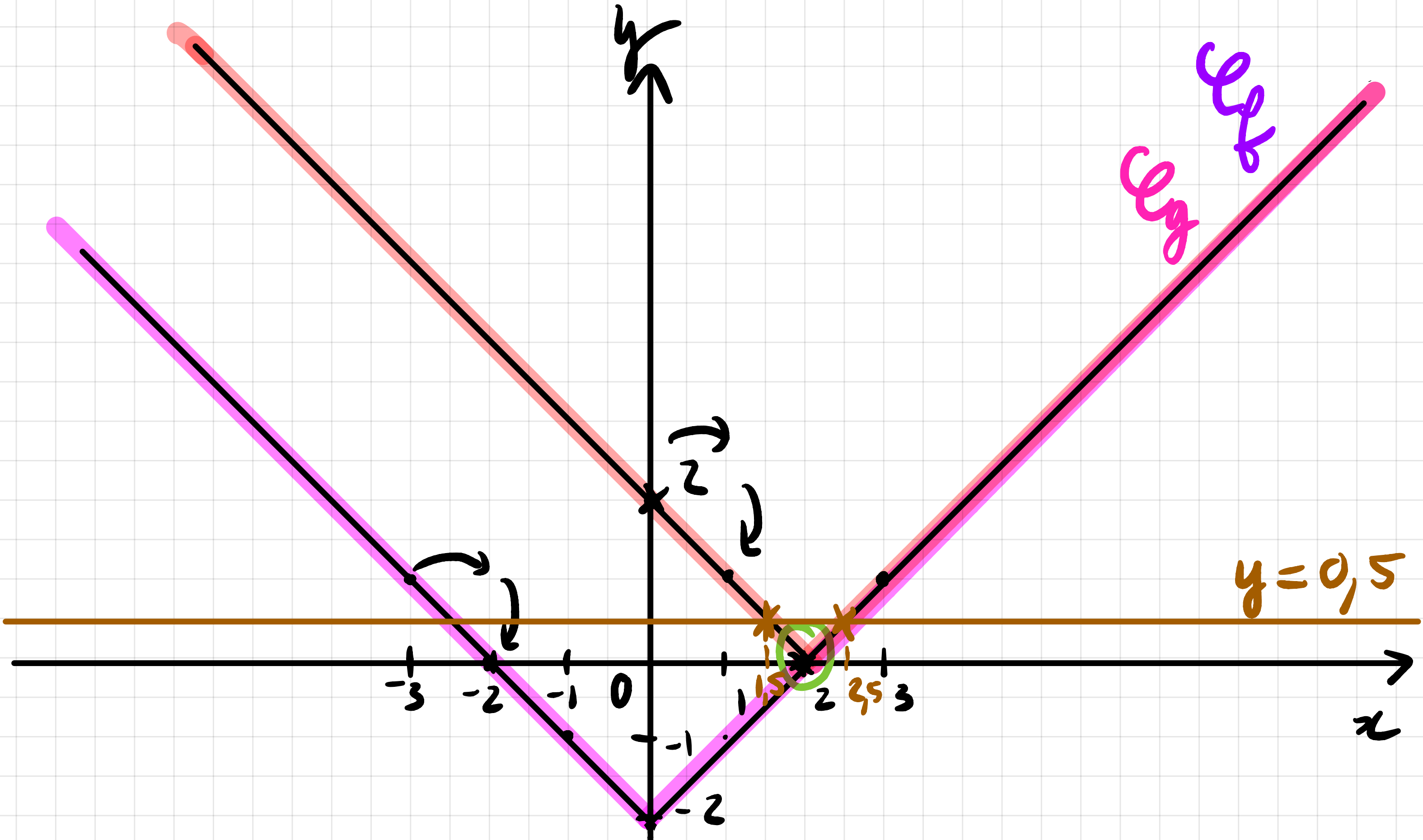
$$f(x) = |x| - 2. \qquad x \geq 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 0. \\ -x - 2 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

$$g(x) = |x - 2|$$

$$x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2.$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \in [2 ; +\infty[. \\ -x + 2 & \text{si } x \in]-\infty ; 2]. \end{cases}$$



$f(x) = g(x)$ admet une unique solution $x = 2$.

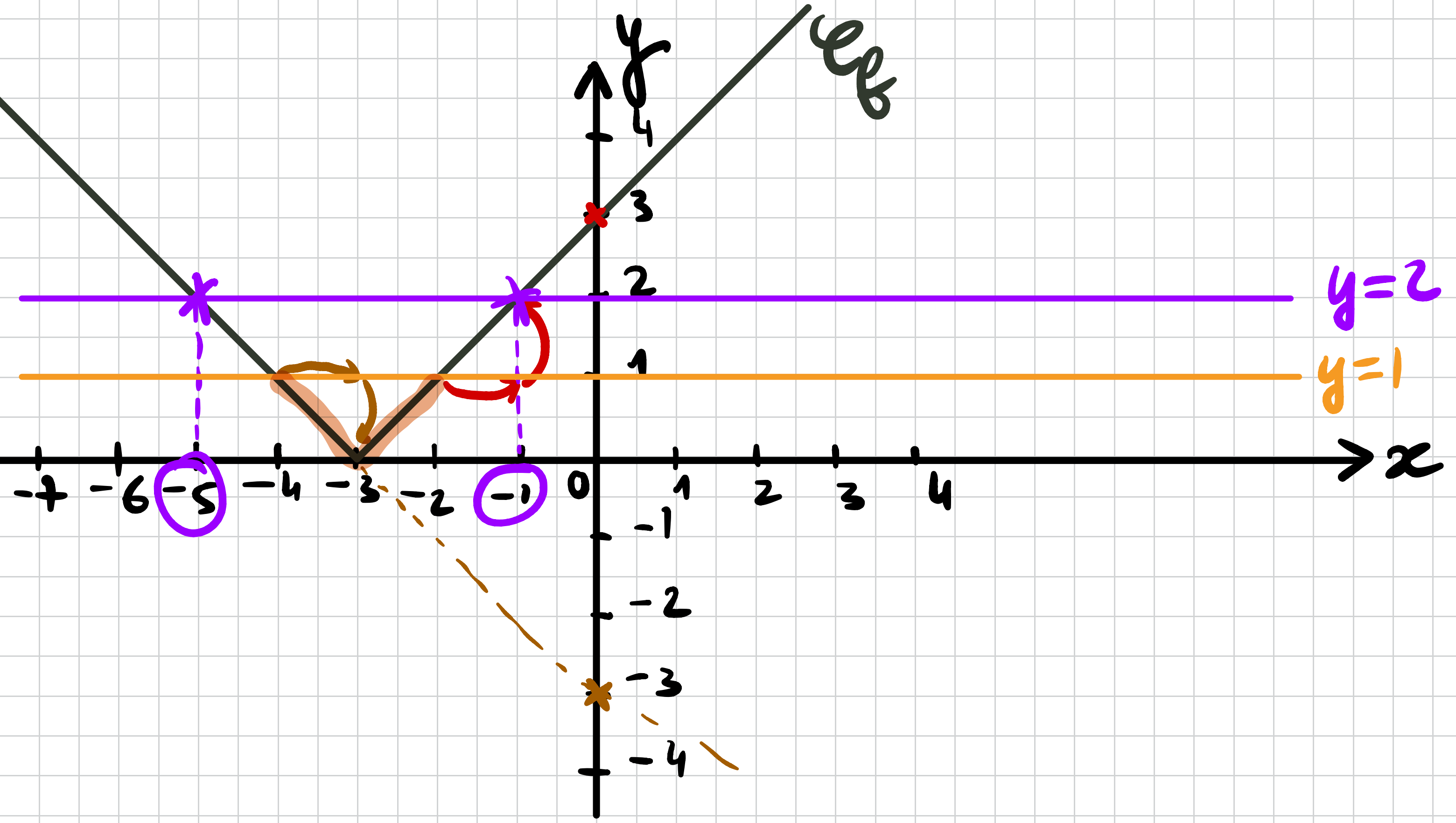
$g(x) = 0{,}5$ admet 2 solutions : $x_1 = 1{,}5$ et $x_2 = 2{,}5$.

Résoudre avec deux méthodes l'équation :

$g(x) = 0,5.$

Exercice 4 : Résolution graphique.

Soit la fonction f représentée par $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



1) Trouver l'expression de la fonction f.

2) Graphiquement, résoudre :

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) < 1$.

<u>1ère branche</u> : $\begin{cases} \text{coeff. directeur : } -1. \\ \text{ordonnée à l'origine : } -3. \end{cases}$

$\rightarrow \quad -x-3.$

$2^{\text{ème}}$ branche : $\begin{cases} \text{coeff. directeur} : +1 \\ \text{ordonnée à l'origine} : 3. \end{cases}$

$\rightarrow x+3.$

Donc : $\boxed{f(x) = |x+3|.}$

(on vérifie) $\rightarrow$ $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x \geq -3. \\ \hookrightarrow f(x) = |x+3| = x+3. \\ x+3 \leq 0 \\ x \leq -3. \\ \hookrightarrow f(x) = |x+3| = -(x+3) \\ \qquad = -x-3. \end{cases}$

2) • $f(x) = 2$ admet 2 solutions :

$\begin{cases} x = -5. \\ x = -1. \end{cases}$

$\boxed{\mathcal{S} = \{-5 ; -1\}}$

• $f(x) < 1$ sur $]-4 ; -2[$.

(quand $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $y = 1$).

Exercice 5 :

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

2) En déduire des écritures simplifiées de :

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{(x-3)^2}. \\ h(x) = \sqrt{(x+2)^2}. \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x^2 \\ (-x)^2 \end{matrix}\right\} = x^2.$$

1) $\begin{cases} \text{Si } x \geq 0 : \sqrt{x^2} = x. \text{ car : } |x| = x. \\ \text{Si } x \leq 0 : \sqrt{x^2} = -x \text{ car } |x| = -x. \end{cases}$

2) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3, \\ -x+3 & \text{si } x \leq 3. \end{cases}$

$x - 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 3.$

$$\sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$$

$$x+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq -2.$$

Exercice 6 :

On étudie le chemin parcouru par un élève de $1^{ère}$ pour venir à Plusdebonnesnotes.

On note : $\begin{cases} M, \text{ la maison de l'élève.} \\ F, \text{ son club de foot.} \\ P, \text{ Plusdebonnesnotes.} \\ L, \text{ le lycée de l'élève.} \end{cases}$

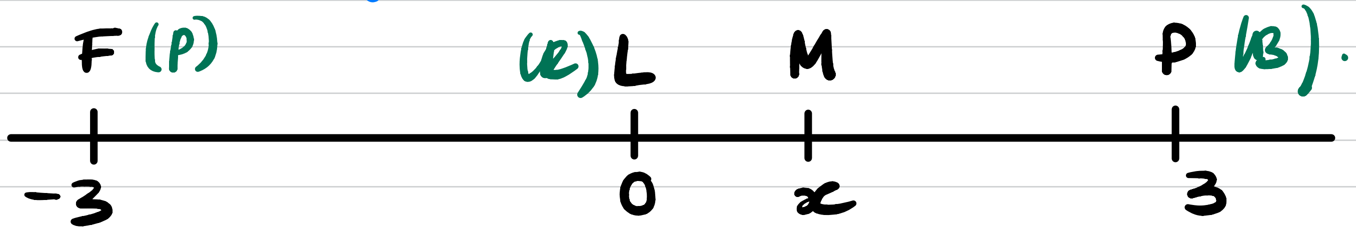
Chaque semaine, l'élève assiste à 3 cours à Plusdebonnesnotes, va au lycée 5 jours et joue au football le samedi et dimanche.

On sait que :

* le lycée est situé à 3km de l'établissement Plusdebonnesnotes.

* le lycée est à distance égale du club de foot et de Plusdebonnesnotes.

On note x l'abscisse de la maison de l'élève en prenant le lycée de l'élève comme origine.



1) Exprimer en fonction de x les valeurs des distances :

* ML.
* MP.
* MF.

2) Exprimer la distance $d(x)$ parcourue par l'élève en allant au lycée, à Plusdebonnardes et au club de football chaque semaine.

3) Résoudre $d(x) = 21$ km.

1) $ML = d(0, x) = |x|.$

$MP = d(x, 3) = |3-x|$

$MF = d(x, -3) = |-3-x|.$

2) $d(x) = 5ML + 3MP + 2MF.$

$= 5|x| + 3|3-x| + 2|-3-x|$

$$\boxed{d(x) = 5|x| + 3|x-3| + 2|x+3|.}$$

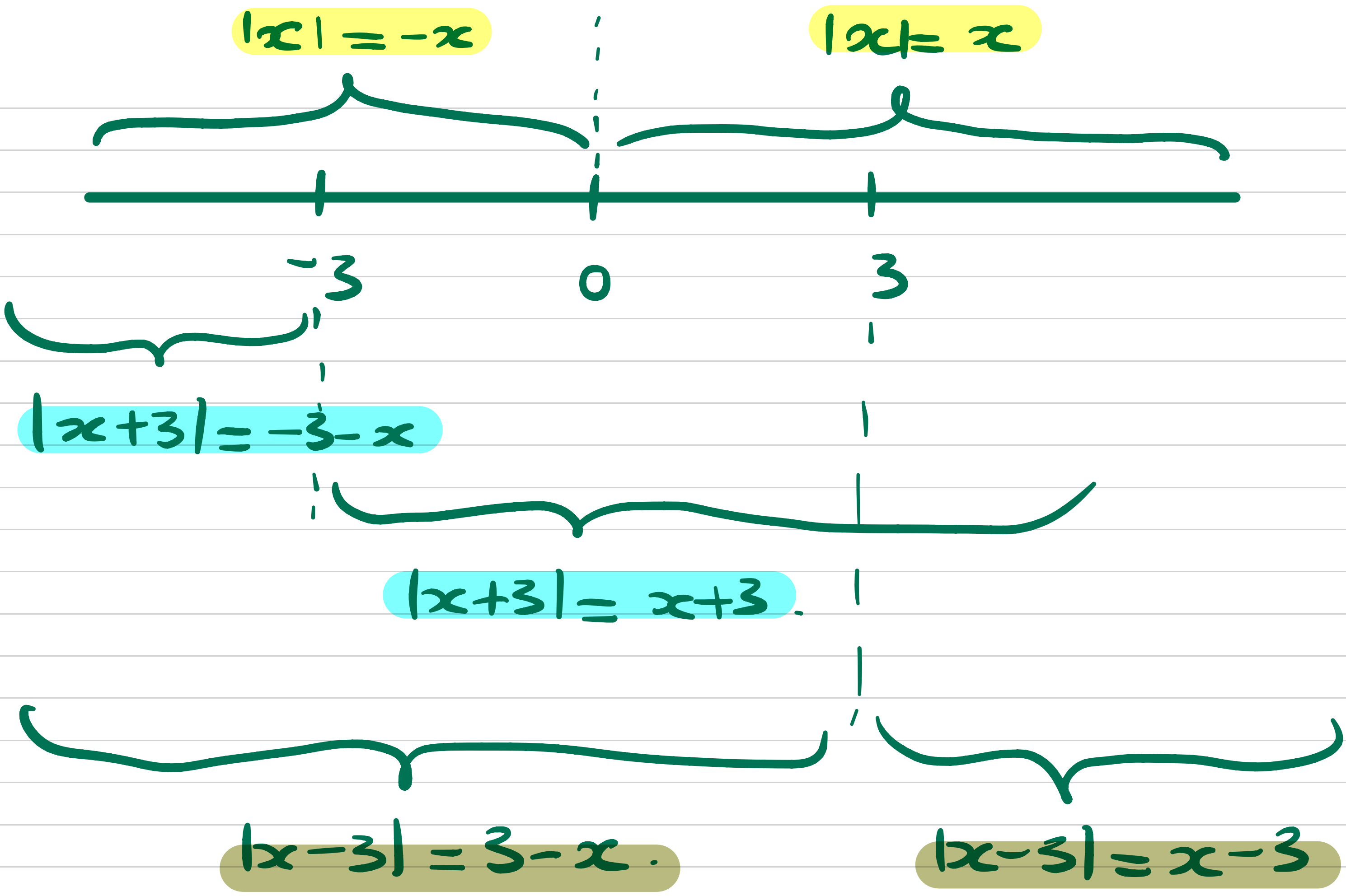
3) $d(x) = 21 \Leftrightarrow 5|x| + 3|x-3| + 2|x+3| = 21.$

Distinction des cas :

$$\begin{cases} |x| = x \text{ sur } \mathbb{R}^+. \\ |x| = -x \text{ sur } \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-3| = x-3 \text{ ssi } x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \\ \quad \text{donc sur } [3; +\infty[. \\ |x-3| = -(x-3) = 3-x \text{ sur }]-\infty; 3]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+3| = x+3 \text{ ssi } x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3. \\ \quad \text{donc sur } [-3; +\infty[\\ |x+3| = -(x+3) = -3-x \text{ sur }]-\infty; -3]. \end{cases}$$



<u>1er cas</u> : sur $]-\infty ; -3]$:

$$d(x) = 5(-x) + 3(3-x) + 2(-3-x).$$
$$= -5x + 9 - 3x - 6 - 2x.$$
$$= -10x + 3.$$

<u>2ème cas</u> : sur $[-3 ; 0]$:

$$d(x) = 5(-x) + 3(3-x) + 2(x+3)$$
$$= -5x + 9 - 3x + 2x + 6.$$
$$= -6x + 15.$$

<u>3ème cas</u> : sur $[0 ; 3]$:

$$d(x) = 5x + 3(3-x) + 2(x+3)$$

$$= 5x + 9 - 3x + 2x + 6.$$
$$= 4x + 15.$$

4ème cas : sur $[3 ; +\infty[$.

$$d(x) = 5x + 3(x-3) + 2(x+3).$$
$$= 5x + 3x - 9 + 2x + 6.$$
$$= 10x - 3.$$

3) Résolvons $d(x) = 15$ km sur les 4 intervalles.

1er cas : $x \in]-\infty ; -3]$:

$$d(x) = 15 \iff -10x + 3 = 21.$$
$$\iff -10x = 18$$
$$\iff x = -1{,}8$$

Or : $-1{,}8 \notin]-\infty ; -3]$: impossible.

2ème cas : $x \in [-3 ; 0]$:

$$d(x) = 15 \iff -6x + 15 = 21$$
$$\iff -6x = 6$$
$$\iff x = -1$$

$-1 \in [-3 ; 0]$: OK.

3ème cas : $x \in [0;3]$:

$$d(x)=15 \iff 4x+15=21$$
$$\iff 4x=6$$
$$\iff x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1,5.$$

$1,5 \in [0;3]$: OK

4ème cas : $x \in [3;+\infty[$:

$$d(x)=15 \iff 10x-3=21.$$
$$\iff 10x=21$$
$$\iff x=2,1.$$

$2,1 \notin [3;+\infty[$: impossible.

$\boxed{\text{Solutions possibles :}}$ $x=-1$ et $x=1,5$.

Pour parcourir 21 km hebdomadairement en allant uniquement au lycée, au club de foot et à Plusdebonnesnotes, la maison de l'élève se situe soit :

- 1 km avant le lycée.
- 1,5 km après le lycée.