plus de bonnes notes
le soutien scolaire connecté

Mercredi 11 octobre 2023

Tale : Spé maths.

Exercice 21 corrigé disponible

La fonction f est définie sur ℝ - {2} par : $f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-3}{(x-2)^2}$

On note (C) la courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x≠2 :

$$f(x)=\underset{1}{\underline{ax+b}}+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{(x-2)^2}$$

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est asymptote la courbe (C).
4. Donner l'équation de la droite (D), autre asymptote à (C).

$D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

2. en $-\infty$: $f(x) = x+1+\frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x-2} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{(x-2)^2} = 0$.

Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

en $+\infty$: De même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-3}{(x-2)^2}$$

$\boxed{\begin{array}{l} x\to 2 \\ x<2 \end{array}}$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x^3-3x^2+3x-3 = -1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} (x-2)^2 = 0^+$

Par quotient des limites. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = -\infty$.

$\boxed{\begin{array}{l} x\to 2 \\ x>2 \end{array}}$

$\lim\limits_{x\to2} x^3-3x^2+3x-3 = -1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} (x-2)^2 = 0^+$.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = -\infty$.

Δ et C_f

en $+\infty$ Δ et C_f sont confondus

$C_f \downarrow$ Δ $\uparrow$

$f(x) - y = x+1+\frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}-(x+1)$

$= \frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2} = 0$ donc :

Δ est bien l'asymptote oblique de C_f en $\pm\infty$.

en 2 $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -\infty$.

asymptote verticale d'équation $x=2$

e. $f(x)=\frac{e^x-4}{e^x+2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-4}{2} = -2$

$f(x) = \frac{e^x(1-\frac{4}{e^x})}{e^x(1+\frac{2}{e^x})}$

$= \frac{1-\frac{4}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Donc par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{1}$

$f(x) = x - e^{-x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = x - e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-x} = -\infty$

Par somme des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

plus de bonnes notes
le soutien scolaire connecté

6.

Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4;3\}$ par $g(x) = \dfrac{2x-6}{-x^2+7x-12}$. Dét
$+\infty$ et 4^+.

$\boxed{\text{en } +\infty}$ $g(x) = \dfrac{x\left(2-\frac{6}{x}\right)}{x^2\left(-1+\frac{7}{x}-\frac{12}{x^2}\right)} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{2-\frac{6}{x}}{\left(-1+\frac{7}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}$

$$\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{6}{x} = 2.$$

$$\lim_{x\to+\infty} -1+\frac{7}{x}-\frac{12}{x^2} = -1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{6}{x}}{-1+\frac{7}{x}-\frac{12}{x^2}} = \boxed{-2}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.$

en 4^+ $\begin{matrix} x\to 4 \\ x>4 \end{matrix}$ | $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} 2x-6 = 2.$

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}} -x^2+7x-12 = 0^-.$$

Par quotient de limites:

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}} g(x) = -\infty.$$

...els que, pour tout réel $x \neq 2$:

$$= \frac{ax+b}{1}+\frac{c}{(x-2)}+\frac{d}{(x-2)^2} = x+1+\frac{3}{x-2}+\frac{-1}{(x-2)^2}$$

...ormes de son ensemble de dé...

$$= \frac{(ax+b)(x-2)^2+c(x-2)+d}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)(x^2-4x+4)+cx-2c+d}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{ax^3-4ax^2+4ax+bx^2-4bx+4b+cx-2c+d}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{ax^3+(b-4a)x^2+(c+4a-4b)x+4b-2c+d}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^3+(-3)x^2+3x-3}{(x-2)^2} = x+1+\frac{3}{x-2}+\frac{-1}{(x-2)^2}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b-4a=-3 \\ c+4a-4b=3 \\ 4b-2c+d=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=-3+4\times1=1. \\ c=3-4\times1+4\times1=3. \\ d=-3-4\times1+2\times3=-1. \end{cases}$$

" $\frac{0}{0}$ " : F.I $\qquad \sin(0) = 0$

① $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

② $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x + 2$

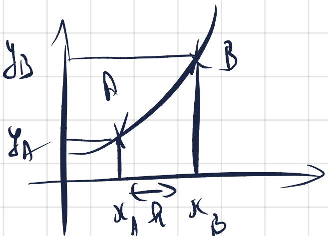
$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$

1ère : $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

$f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(0+x) - \sin(0)}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(0+x) - \sin(0)}{x} = \sin'(0).$

$= \cos(0) = 1.$

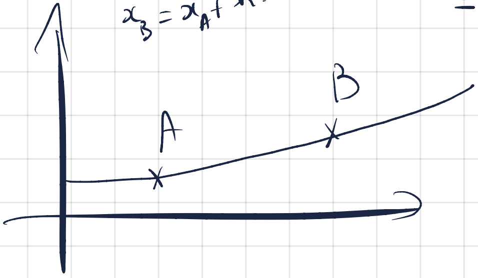


taux d'accroissement.

$$\tau = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$= \frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}$$

$x_B = x_A + h.$



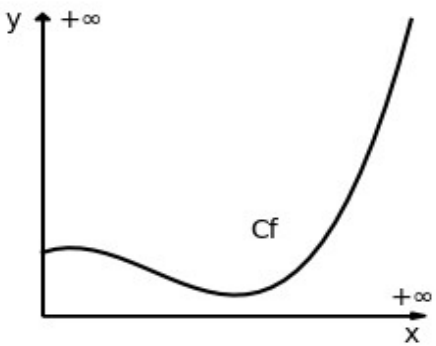
Limites de fonctions, comportement asymptotique – Fiche de cours

1. Limite infinie en l'infini

a. Définition

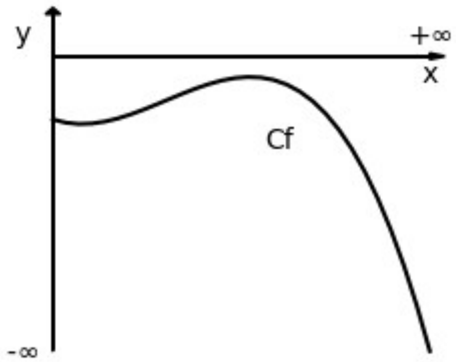
L'infini est un concept qui n'a pas d'équivalent physique ; il s'agit d'une limite

- limite en $+\infty$:



$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R} \;\; \exists x \in \mathbb{R} \;\; tel\,que\, f(x) \in]A ; +\infty[$$

- limite en $-\infty$:



$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R} \;\; \exists x \in \mathbb{R} \;\; tel\,que\, f(x) \in]-\infty ; A[$$

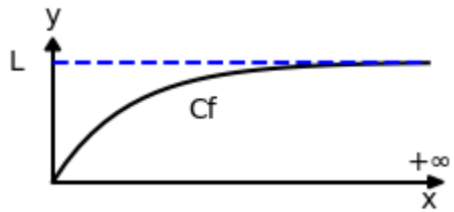
b. Limites de références

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \;\, pair \\ -\infty & n \;\, impair \end{cases}$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2. Limite réelle en l'infini

a. Définition



$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \iff \forall A > 0 \;\; \exists x \in \mathbb{R} \, tel\,que\, f(x) \in]L - A ; L + A[$$

b. Limites de références

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$

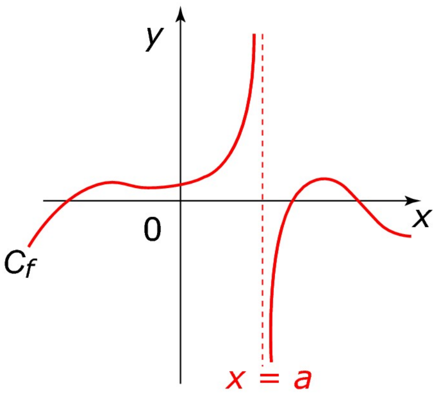
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

c. Asymptote horizontale

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \iff$ la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $\pm\infty$

3. Limite infinie pour un réel

a. Mise en évidence



b. Limites de références

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n\,pair \\ -\infty & n\,impair \end{cases}$

c. Asymptote verticale

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$ la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f

4. Croissances comparées

- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \cdot e^x = 0$

5. Opérations sur les limites

a. Somme de deux fonctions

lim *f*	*l*	*l*	*l*	+∞	-∞	+∞
lim *g*	*l'*	+∞	-∞	+∞	-∞	-∞
lim f + g	*l + l'*	+∞	-∞	+∞	-∞	FI

b. Produit de deux fonctions

lim *f*	*l*	*l* > 0	*l* > 0	*l* < 0	*l* < 0	+∞	+∞	-∞	0
lim *g*	*l'*	+∞	-∞	+∞	-∞	+∞	-∞	-∞	(±∞)
lim *f · g*	*l · l'*	+∞	-∞	-∞	+∞	+∞	-∞	+∞	FI

c. Quotient de deux fonctions

Limite d'un quotient									
Si *f* a pour limite en *a*	*l*	*l*	+∞	+∞	-∞	-∞	±∞	*l*	0
Si *g* a pour limite en *a*	*l'*≠0	±∞	*l'*> 0	*l'*< 0	*l'*> 0	*l'*< 0	±∞	0^+_-	0
Si $\frac{f}{g}$ a pour limite en *a*	$\frac{l}{l'}$	0	+∞	-∞	-∞	+∞	FI	±∞	FI

d. Limite d'une fonction rationnelle en l'infini

La limite d'un polynôme en l'infini est égale à la limite de ses monômes de plus haut degré en l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 + 5x - 1$

e. Limite d'une composé de deux fonctions

si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{u \to b} f(u) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

6. Limites et inégalités

a. Comparaison de limites finies

si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x) \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} f(x) = L$ et $\lim_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} g(x) = L'$

alors $L \leq L'$

b. Théorèmes de comparaison

- comparaison avec -∞ :

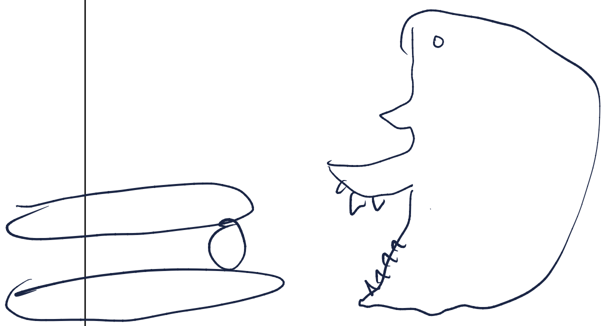
si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x) \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} g(x) = -\infty$

alors $\lim_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} f(x) = -\infty$

- comparaison avec +∞ :

si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x) \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} f(x) = +\infty$

alors $\lim_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} g(x) = +\infty$



c. Théorème d'encadrement dit « théorème des gendarmes »

si $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x) \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} g(x) = L$ et $\lim_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} h(x) = L$

alors $\lim_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} f(x) = L$

7. Asymptote oblique

$\lim_{x \to \infty} f(x) = ax + b \Leftrightarrow$ la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $\pm\infty$

Limites de fonctions – Comportement asymptotique - Exercices

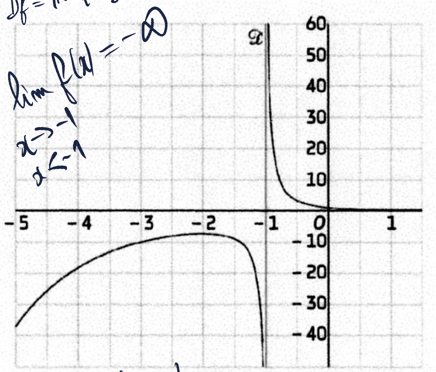
Exercice 1 corrigé disponible

Dans chacun des cas suivants, on donne la représentation graphique d'une fonction f ainsi que les éventuelles asymptotes. En déduire :

- le domaine de définition de f
- les limites aux bornes de l'ensemble de définition

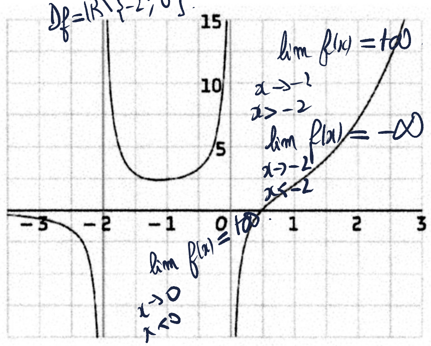
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$

1. 

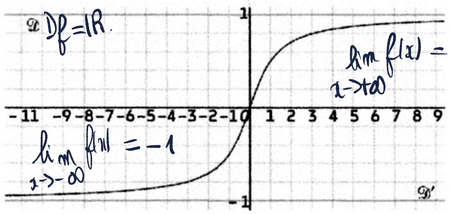
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 0\}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$

2. 

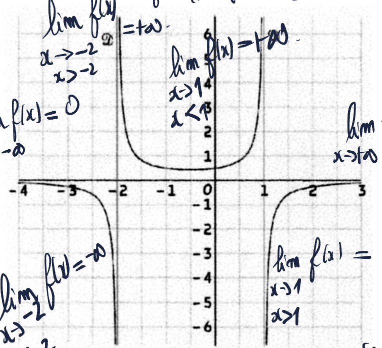
$D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

3. 

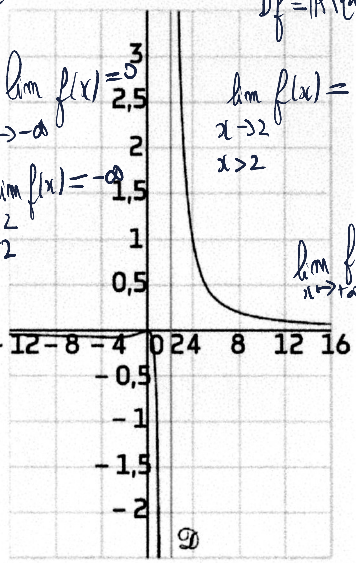
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 1\}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$

4. 

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

5. 

Exercice 2 corrigé disponible

Dans chacun des cas suivants, on donne certaines limites d'une fonction f.
Donner une interprétation graphique de chacune de ces limites.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$.
3. $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ x < -4}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ x > -4}} f(x) = -\infty$.
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$.
5. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 4$.

$\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}} = \dfrac{1}{\cancel{x}} \times \dfrac{\cancel{x}}{3} = \dfrac{1}{3}$

Exercice 3 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \; ; \; \lim_{x \to +\infty} g(x) \; ; \; \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) \; ; \; \lim_{x \to +\infty} (f \times g)(x)$$

$\dfrac{x^2}{\frac{1}{x}} = x^2 \times x = x^3$

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{3}{x}$
2. $f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad x \times \cancel{x} \times \dfrac{1}{\cancel{x}} = x$.
3. $f(x) = \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{\cancel{x} \times 1}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}+1}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{\cancel{x} \times 1}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}-1}$

Exercice 4 corrigé disponible

Etudier la limite à droite et à gauche de a pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{1-2x}$; $\qquad a = \dfrac{1}{2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $\qquad a = 1$
3. $f(x) = \dfrac{4x-5}{1-x}$; $\qquad a = 1$

Exercice 5 corrigé disponible

Déterminer les limites en -∞ et en +∞ des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{4x-1}{3x+1}$ $\left.\right)^{+\infty}$ $\left.\right)^{+\infty}$ $= \dfrac{\cancel{x}(4-\frac{1}{x})}{\cancel{x}(3+\frac{1}{x})} = \dfrac{4-\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4-\frac{1}{x} = 4$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3+\frac{1}{x} = 3$

Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{4}{3}$.

2. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{3x^2+5}$

3. $f(x)=\dfrac{-4x+1}{x^2+1}$

4. $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{3x+1}$

Exercice 6 corrigé disponible

f est définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x-\sin x}{3x+1}$

1. Montrer que pour tout x ≥ 0,

$$\frac{2x-1}{3x+1}\leq f(x)\leq\frac{2x+1}{3x+1}$$

2. En déduire la limite de f en +∞.

Exercice 7 corrigé disponible

On définit f sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$

1. Prouver que pour tout réel $x\geq 0$: $4x^2\leq 4x^2+x+1\leq(2x+1)^2$

2. En déduire que pour tout réel $x>0$: $2\leq f(x)\leq\dfrac{2x+1}{x}$.

3. Calculer la limite de f en +∞.

Exercice 8 corrigé disponible

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+3}}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-3x+2}{x+1}$

Exercice 9 corrigé disponible

On considère 3 fonctions f, g et h, définies sur ℝ, telles que pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x)\leq g(x)\leq h(x)$$

Si l'on sait que l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, alors on peut en déduire :

Réponse A : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Réponse B : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Réponse C : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

Exercice 10 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes (On justifiera soigneusement) :

1. $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2-5x+6}{(3-x)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}$

4. $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{4-x}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{5x^2-1}$

6.

Soit g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4;3\}$ par $g(x)=\dfrac{2x-6}{-x^2+7x-12}$. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et 4^+.

Exercice 11 corrigé disponible

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

Vrai-Faux

Pour chacune des affirmation ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1) Si pour tout $x>0$, on a $f(x)\leqslant\dfrac{2}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2) Si pour tout $x>0$, on a $2+\dfrac{2}{x}\leqslant f(x)\leqslant 2+\dfrac{3}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

3) Si pour tout $x>0$, on a $1+\dfrac{3}{x}\leqslant f(x)\leqslant 2+\dfrac{3}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ avec $\ell\in[1;2]$.

4) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas la droite d'équation $y=a$.

Exercice 12 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}$
5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}$

Exercice 13 corrigé disponible

Soit la fonction f définie sur]-∞,0[par :

$$f(x)=x^3-\cos x$$

1. Démontrer que l'on a pour tout x ≤0 :

$$f(x)\leq x^3+1$$

2. En déduire la limite de f en -∞.

Exercice 14 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{5-\dfrac{4}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right)^4$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+9-\dfrac{16}{x^2+4}}$

Exercice 15 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a. A quelle forme indéterminée la limite de f en $+\infty$ conduit-elle ?

   b. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

   c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 16 corrigé disponible

Determiner les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^5-6x^4+3x^2-12)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+x+3)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x+2}{3x-7}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^2+2x}{3x^3-7}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-x+\dfrac{1}{x^2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2-x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

Exercice 17 corrigé disponible

Vrai ou faux

a. Si pour tout réel x, $f(x)\geqslant x^2$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b. Si pour tout réel x strictement positif, $f(x)\leqslant \dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

c. Si pour tout réel x strictement positif, $1\leqslant f(x)\leqslant x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

Exercice 18 corrigé disponible

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse (éventuellemnt par une définition ou un dessin) :

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors il existe un réel m tel que si $x>m$, alors $f(x)>10^4$.
2. Si f est croissante sur $[0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$, alors il existe un intervalle de la forme $]m;+\infty[$ tel que pour tout $x\in]m;+\infty[$, $f(x)<0$.
4. Si $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$, alors la droite d'équation $y=-1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 19 corrigé disponible

Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x+7\sqrt{x}+2}{-3+x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

Exercice 20 corrigé disponible

Déterminer :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+5}{4x+1}}$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+4}-x)$;
3. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$.

$2x^2+3x+5 = ax^2+bx+c$

Exercice 21 corrigé disponible

La fonction f est définie sur ℝ - {2} par : $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x-3}{(x-2)^2}$

On note (C) la courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x≠2 :

$$f(x)=\underbrace{ax+b}_{1}+\frac{c}{(x-2)}+\frac{d}{(x-2)^2}$$

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est asymptote la courbe (C).
4. Donner l'équation de la droite (D), autre asymptote à (C).

Exercice 22 corrigé disponible

Soit la fonction f définie sur ℝ - $\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+11}{2x+3}$

C est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (unité graphique : 1cm).

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^-} f(x)$. Donner une interprétation graphique.
2. Montrer que pour tout x ∈ℝ - $\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$, on a : $f(x)=x+1+\dfrac{8}{2x+3}$

   Etudier alors la limite de f en + ∞ et en - ∞.
3. Soit D la droite d'équation y = x+1.

   Montrer que D est une asymptote oblique à C en +∞ et en -∞.

Exercice 23 corrigé disponible

Déterminer la limite de chacune des fonctions dans l'endroit indiqué.

$f_1(x)=\dfrac{x-4}{x^2+3x+2}$ en -2^-.

$f_2(x)=x^3-x^2\sqrt{x}$; en $+\infty$.

$f_3(x)=(-3x^2+5x-11)^{111}$; en $+\infty$

$f_4(x)=\dfrac{x^5+4x^2+3\pi}{5-x^2}$; en $-\infty$.

$f_5(x)=\dfrac{\sin((x-1)^2)}{x-1}$; en 1

$f_6(x)=\dfrac{\cos(3x)+x}{x+2}$; en $-\infty$

Exercice 24 corrigé disponible

Par un encadrement judicieusement choisi, déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2-\cos x}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x\sin x$

Exercice 25 corrigé disponible

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x)=e^{-3x}$ b) $g(x)=e^x+e^{-x}$ c) $h(x)=x+e^x$ d) $k(x)=e^{2x}+e^x+1$

e) $l(x)=e^{3x}-e^x$ f) $m(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+2}$ g) $n(x)=\dfrac{-2e^x}{1+e^x}$

Exercice 26 corrigé disponible

Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^2+2-e^x$ b) $g(x)=\dfrac{2e^x-x}{x^2}$ c) $h(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

d) $l(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$ e) $k(x)=\dfrac{\sqrt{e^x+2}}{x}$ f) $t(x)=\dfrac{e^{2x}+x^2}{x^2+x-3}$

Exercice 27 corrigé disponible

Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$

Préciser l'équation des éventuelles asymptotes

1. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$
2. $f(x)=e^x-x$
3. $f(x)=e^{2x}-xe^x+1$
4. $f(x)=x^4-2xe^x+e^2$
5. $f(x)=2x^3+3x-\dfrac{1}{x}$
6. $f(x)=(e^{2x}-1)(1-e^x)+\dfrac{1}{x}$
7. $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}-1}+e^x$
8. $f(x)=\dfrac{-2}{x^3+2x}+\sqrt{x^2}$

Exercice 28 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2x^2 - x + 3}{x - 1}$

2. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 4x}{-x^2 - 2x + 8}$

3. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$

4. $\lim\limits_{x \to 9^-} \dfrac{\sqrt{9 - x}}{x^2 - 81}$

Exercice 29 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x^2 + 5}$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 1}{x^2 + 5}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x(-x - 1)}{(x^2 + 2)(x + 3)}$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2}{(x + 2)(x - 5)}$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2 + 5x - 1}{4x^2 + x + 1}$

Exercice 30 corrigé disponible

Déterminer les limites des fonctions suivantes à l'endroit indiqué.

$f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x^2 - 3}{x - 3x^2}\right)$ sur $D = \mathbb{R}_+^*$. Limite en $+\infty$.

$g(x) = \dfrac{2x + 2}{3x^2 + 7x + 4}$. Limite en -1.

Exercice 31 corrigé disponible

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Déterminer les limites de f et g aux bornes de leur domaine de définition

Exercice 32 corrigé disponible

Déterminer les limites en $\boxed{-\infty}$ et $\boxed{+\infty}$ des fonctions suivantes.

a. $f(x) = e^x - x$

b. $f(x) = (x + 1)e^x$

c. $f(x) = 4xe^{-x}$

d. $f(x) = x - e^{-x}$

e. $f(x) = \frac{e^x - 4}{e^x + 2}$

f. $f(x) = \frac{e^x}{x - 1}$

Exercice 33 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \left(\dfrac{1 - x^2}{x}\right)e^{-x}$

Répondre par vrai ou faux en justifiant sa réponse.

A. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

B. la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe représentative de f quand f tend vers $+\infty$.

Complément de dérivation – Fiche de cours

1. Composée de 2 fonctions

a. Définition

Soit u une fonction définie sur I à valeurs dans J et v une fonction définie sur J ; on appelle la composée de u par v $(v\circ u)(x)=v(u)(x)$

b. Dérivée

Soit u une fonction définie sur I à valeurs dans J et v une fonction définie sur J ; $(v\circ u)'=u'\cdot(v'\circ u)$

c. Propriétés

Soit u une fonction définie et dérivable sur I :

- $(e^u)'=u'\cdot e^u$
- $\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}$ avec $u\neq 0$
- $(u^n)'=n\cdot u'\cdot u^{n-1}$
- $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u>0$

2. Dérivée seconde

Lorsque f est dérivable sur I, on appelle f' sa dérivée
Lorsque f' est dérivable sur I, on appelle f'' sa dérivée

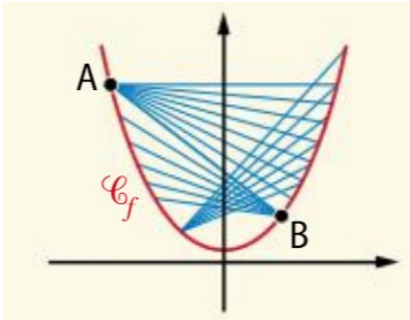
f'' est appelée dérivée seconde de f

3. Convexité

a. Fonctions convexes

Une fonction est dite convexe sur un intervalle [a;b] lorsque la courbe représentative est située :

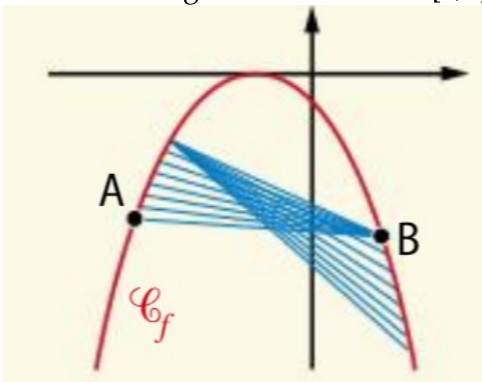
- au dessous de toutes les sécantes définies sur [a;b]
- au dessus de toutes les tangentes définies sur [a;b]



b. Fonctions concaves

Une fonction est dite concave sur un intervalle [a;b] lorsque la courbe représentative est située :

- au dessus de toutes les sécantes définies sur [a;b]
- au dessous de toutes les tangentes définies sur [a;b]



c. Définition

Soit f définie et 2 fois dérivable sur I ; les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur I
- la courbe représentative de f est située au dessus de ses tangentes
- f' est croissante
- f''>0

e. <u>Point d'inflexion</u>

Un point d'inflexion est un point pour lequel la tangente traverse la courbe.

Un point d'inflexion est également défini comme le changement de convexité d'une fonction.