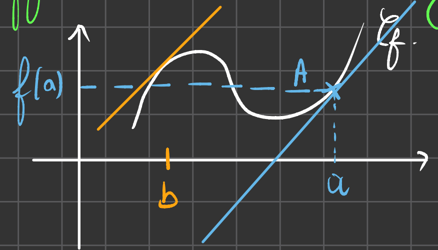
Mercredi 18 octobre 2023. Tale Spé Maths.

f est dérivable en a, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \in \mathbb{R}$.

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a



$f(a)$?

$f'(a)$

Rappels :

$f(x)$	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

Opérations sur les dérivées

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$k \times u(x)$, $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'(x)$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + v'(x)u(x)$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
$(u(x))^n$	$n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)\,e^{u(x)}$

Application : $f(x) = 2x^2$

Déterminer $f'(3)$. $\rightsquigarrow$ Coeff directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 3.

$$f'(x) = 2 \times 2x = 4x.$$

$$f'(3) = 4 \times 3 = 12.$$

$4x > 0$ si $x > 0$.

$4x < 0$ si $x < 0$.

$$f(x) \longrightarrow f'(x)$$

$$\downarrow$$

Var de f $\longleftarrow$ Signe

$f(x) = \_ \ \_ \ \_$

$$f'(x) = e^{x}(4x + 1)$$

$$f(x) \longrightarrow f'(x) \longrightarrow f''(x)$$

$$\downarrow$$

Signe.

$+$ $\swarrow$ Convexe

$-$ $\searrow$ Concave

Exercice 1 : $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)^5 = (u(x))^n$

$u(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

$u'(x) = 3x^2 + 4x + 3$.

$f'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$

$$f'(x) = 5x(3x^2+4x+3)(x^3+2x^2+3x+4)^4$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad 5x(x^3+2x^2+3x+4)^4 \geq 0.$$

$a=3$ $b=4$ $c=3$

Donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $3x^2+4x+3$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4\times 3\times 3$$

$$\Delta = 16 - 36 = -20 < 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, f est strictement croissante.

5) $f(x) = e^{\frac{x+2}{x-7}} = e^{u(x)}$ où $u(x) = \dfrac{x+2}{x-7}$

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

$$u'(x) = \frac{1\times(x-7) - 1\times(x+2)}{(x-7)^2}$$

$$u'(x) = \frac{\cancel{x} - 7 - \cancel{x} - 2}{(x-7)^2}$$

$$u'(x) = \frac{-9}{(x-7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-9}{(x-7)^2}\, e^{\frac{x+2}{x-7}}$$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
Var° de f		↘	‖	↘	

Exercice 2.

Complément de dérivation – Exercices - Devoirs

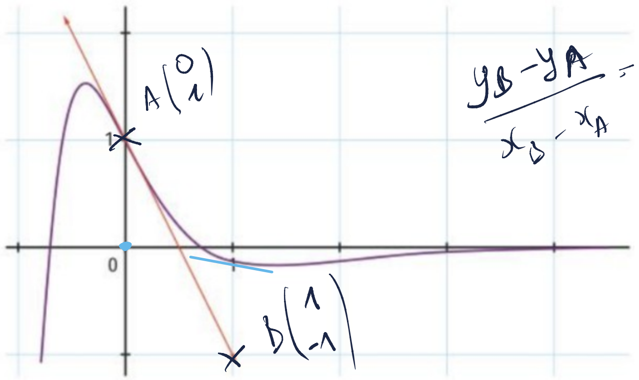
Exercice 1 **corrigé disponible**

Préciser le domaine de définition, la dérivée et dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\sqrt{x+\frac{1}{x}}$
2. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$
3. $f(x)=(x^3+2x^2+3x+4)^5$
4. $f(x)=e^{x^2-5x+4}$
5. $f(x)=e^{\frac{x+2}{x-7}}$

Exercice 2 **corrigé disponible**

La courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.



$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-1-1}{1-0}=-2$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

1. $f'(0)=-1$ F $f'(0)=-2$
2. $f'(1)=0$ F $f'(1)<0$
3. $f''(1)<0$ F car f est convexe en 1.
4. $f'(x)>0$ sur $[2\,;3]$. V car f est ↗ sur $[2;3]$
5. f est concave sur $[0\,;3]$
6. Si f est la fonction dérivée d'une fonction g, alors g est décroissante sur $[1\,;3]$
7. Si f est la fonction dérivée d'une fonction g, alors g est concave sur $[0\,;0{,}5]$

Exercice 3 **corrigé disponible**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=4x^3-15x^2-18x+12.$$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. Établir la convexité de la fonction f.

3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de C_f.

Exercice 4 **corrigé disponible**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes et les écrire sous forme simplifiée :

$f_1(x)=\frac{1}{(x^2+1)^3}$; $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

$f_2(x)=(2x^3+2x^2)^5$; $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$f_3(x)=\left(\frac{3x^2+5}{x+2}\right)^3$; $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

$f_4(x)=\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+2}}$; $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

$f_5(x)=\sqrt{\sqrt{3x+1}}$; $\mathscr{D}=\mathbb{R}_+$

Exercice 5 corrigé disponible

Soit f définie sur $I = [-3; +\infty[$ par

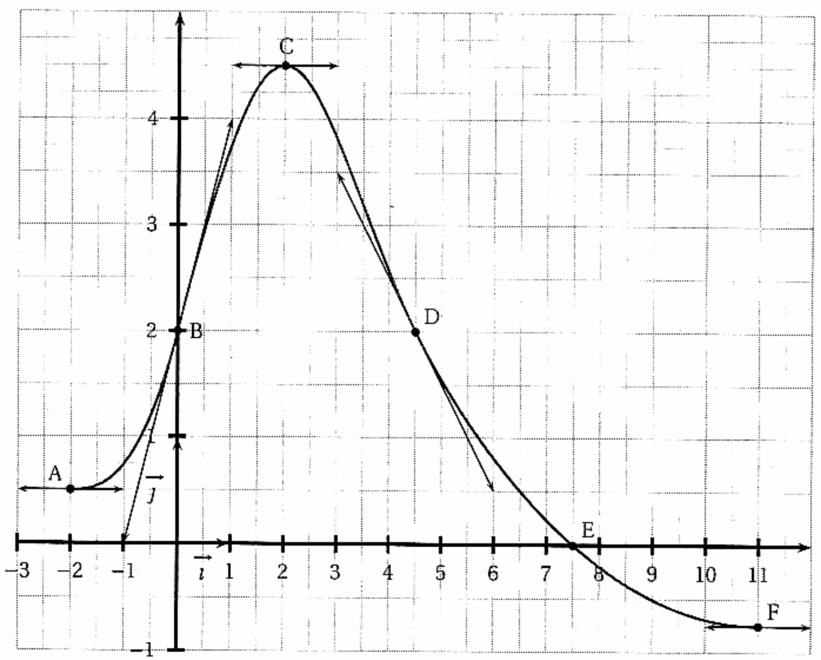
$$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$$

1. a) Etudier la dérivabilité de f en -3 et interpréter graphiquement le résultat.

   b) Etudier la dérivabilité de f en 0, et interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f$.
3. Etudier les variations de f sur I et dresser son tableau de variations.
4. Représenter sommairement la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 6 corrigé disponible

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 11]$, et on donne sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, figure ci-dessous.



On sait que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A$(-2 ; 0,5)$, B$(0 ; 2)$, C$(2 ; 4,5)$, D$(4,5 ; 2)$, E$(7,5 ; 0)$ et F$(11 ; -0,75)$.
Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points A, B, C, D et F sont représentées sur la figure.
On utilisera les informations de l'énoncé et celles lues sur la figure pour répondre aux questions.

*Pour chacune des questions, une seule des réponses **A, B** ou **C** est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif la note est ramenée à 0.*

1. $f'(0)$ est égal à :

   A : $\frac{1}{2}$ **B :** 2 **C :** 4
2. $f'(x)$ est strictement positif sur l'intervalle :

   A : $]0 ; 11[$ **B :** $]0 ; 7,5[$ **C :** $]-2 ; 2[$
3. Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D est :

   A : $y = -x + 6,5$ **B :** $y = x - 6,5$ **C :** $y = -2x + 11$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm.

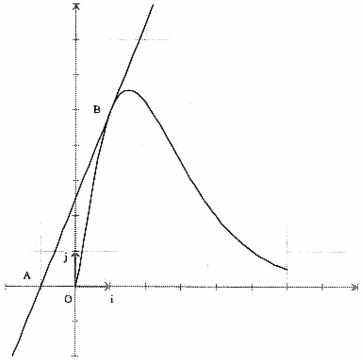
1. Justifier que f est dérivable sur $]-1; 1[$ et que, pour tout $x \in]-1; 1[$, $f'(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
3. (a) Etudier la dérivabilité de f en -1.

   (b) Etudier la dérivabilité de f en 1.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et sa tangente T.

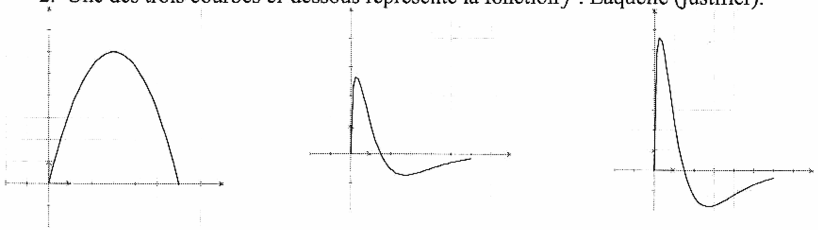
Exercice 8 **corrigé disponible**

La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie sur [0 ; 6]. Les points A et B ont pour coordonnées $A(-1;0), B(1;5)$. B est un point de C_f, et la droite (AB) est tangente à C_f.

1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la dérivée de la fonction f.



2. Une des trois courbes ci-dessous représente la fonction f'. Laquelle (justifier).



3. On appelle g la fonction définie sur [0 ; 6] par $g(x)=\sqrt{f(x)}$. Donner l'expression de sa dérivée g' (à l'aide de f et f'), calculer $g'(1)$.

Exercice 9

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=(x^2-3x+2)e^x.$$

1. Déterminer la dérivée seconde h'' de h et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire la convexité de h sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit h la fonction définie sur $\mathcal{D}_h =]-\infty\,;2]\cup[3\,;+\infty[$ par $h(x)=e^{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

1. Déterminer, pour tout réel $x\in\mathcal{D}_{h'}$, la fonction dérivée h'.

2. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathcal{D}_{h'}$.

3. En déduire les variations de h sur $\mathcal{D}_h$.

4. Déterminer les équations des tangentes T_1 et T_4 à la courbe représentative de h aux points d'abscisses 1 et 4.

5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_4.

Exercice 11 **corrigé disponible**

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=(5-x^2)\sqrt{x}.$$

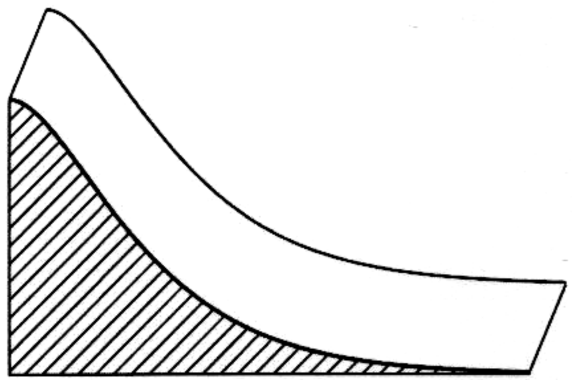
1. Déterminer la fonction dérivée g' et la fonction dérivée seconde g'' pour tout réel x strictement positif.

2. Étudier le signe de $g''(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

3. En déduire la convexité de g et les abscisses des éventuels points d'inflexion.

Exercice 12 corrigé disponible

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.
Voici ce schéma :

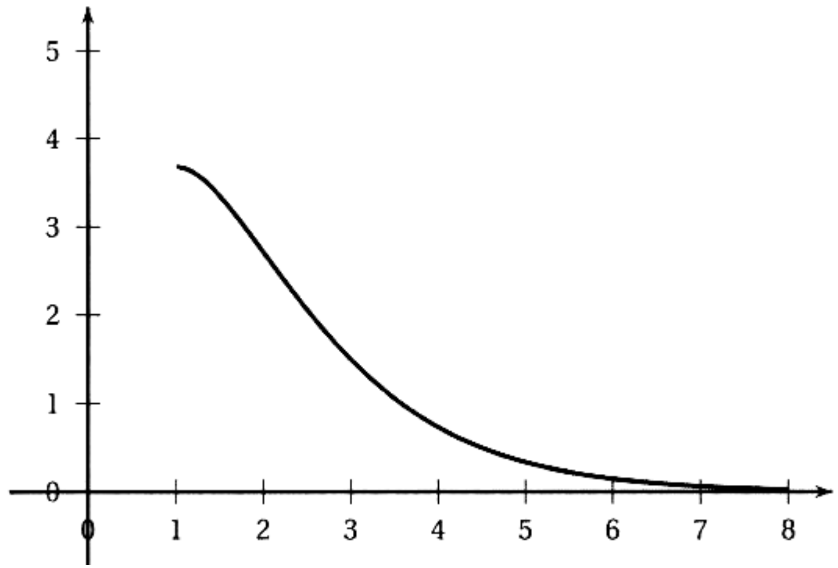


Partie A Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 8]$ par

$$f(x) = (ax + b)e^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

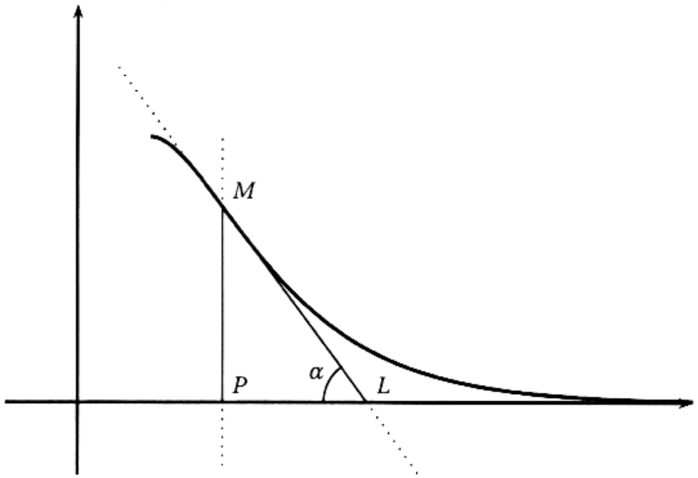
La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
   Déterminer la valeur de l'entier b.
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
   Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.
On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;8]$, $f'(x) = 10(1-x)e^{-x}$.
Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1\,;8]$.
2. Soit x un réel de l'intervalle $]1\,;8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan\alpha = |f'(x)|$.
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

Exercice 13

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (1+x)e^{1-x^2}$.

1. Déterminer la fonction dérivée φ' et la fonction dérivée seconde φ'' de φ pour tout réel x.

2. Après avoir justifié que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) = 2(x-1)(2x^2+4x+1)e^{1-x^2}$, étudier la convexité de φ et déterminer les abscisses des éventuels points d'inflexion.

Exercice 14

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2+x+1}$. On note C_f sa courbe représentative.

1) Déterminer la fonction dérivée de f, puis étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

2) Combien C_f admet-elle de tangentes parallèles à l'axe des abscisses. Justifier.

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f en le point A d'abscisse 0 de C_f.

Exercice 15

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = \sqrt{x^2+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = (-2x^3 + 5x + 9)^5$

c) $h(x) = \dfrac{e^{-5x^2+5x+4}}{x+7}$ sur $]-7\,;\,+\infty[$ (dérivée sous forme factorisée).

$d)$ k définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $k(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2\sqrt{x}}{3}$

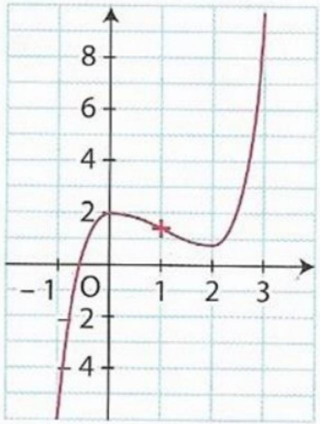
$e)$ $l(x) = \dfrac{2}{1+e^{-4x}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16

Dans un repère, voici la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-1\,;3]$.

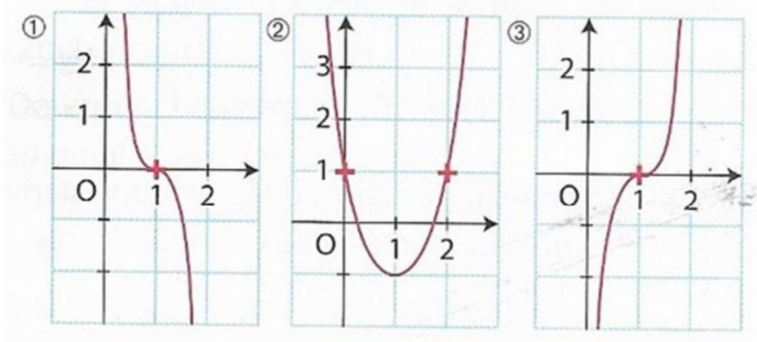
a) Étudier graphiquement la convexité de la fonction f.

b) En déduire les variations de la fonction dérivée f'.



c) Parmi les trois courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'', dérivée seconde de f ?

Justifier.



Exercice 17

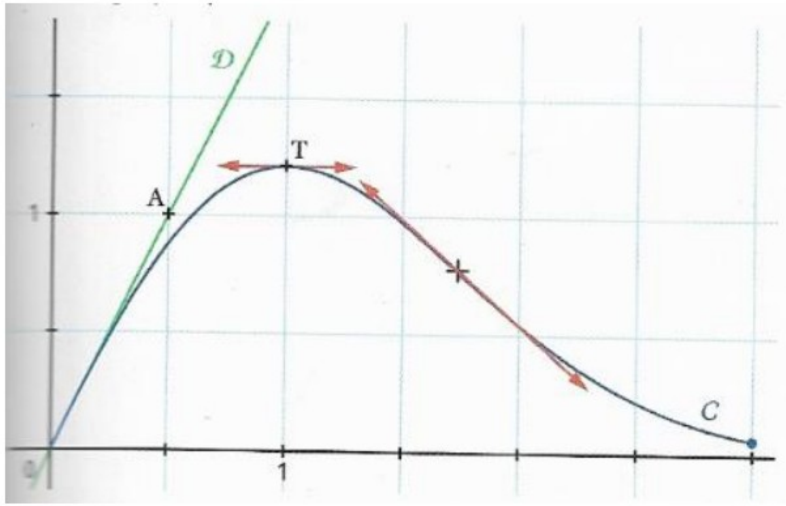
1a) Etudier algébriquement la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 7xe^{-x}$.

1b) En déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

On donne ci-dessous la courbe C représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;3]$.

La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe C en son point d'abscisse 0. Elle passe par le point A de coordonnées $(0{,}5\ ;\ 1)$ et par l'origine du repère.



La tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

En s'aidant du graphique ci-dessus :

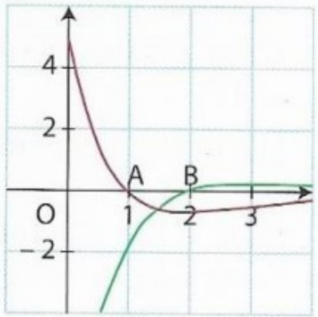
a) Déterminer la valeur de $f'(0)$.

b) Déterminer la valeur de $f\,'(1)$ en justifiant.

c) Déterminer l'intervalle le plus grand possible sur lequel f semble être concave.

Exercice 19

f est une fonction deux fois dérivable sur $[0\,;4]$.
Voici la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de sa fonction dérivée f' et la courbe représentative $\mathscr{C}''$ de sa fonction dérivée seconde f''.



A(1 ; 0) est un point appartenant à l'une de ces courbes et B(2 ; 0) un point appartenant à l'autre courbe.

a) Identifier chaque courbe sur le graphique. Justifier.

b) En déduire la convexité de la fonction f et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion.

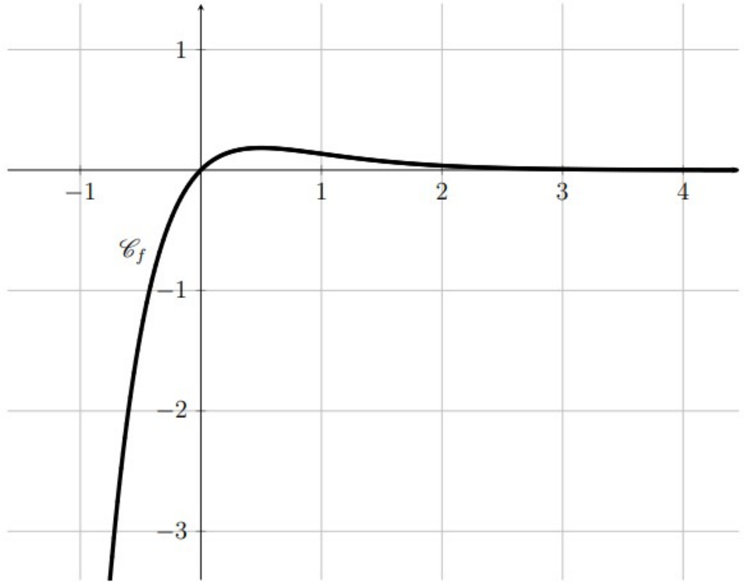
Exercice 20

Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto (1+\mathrm{e}^x)^4$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$.

Exercice 21 **corrigé disponible**

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$.



1. À partir de cette courbe, et avec la précision permise par le graphique,
   a. déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$;
   b. déterminer la convexité de f sur $\mathbb{R}$ (on donnera les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$).
2. La fonction f est en fait définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que, pour tout réel x, $f''(x) = 4\mathrm{e}^{-2x}(x-1)$ et en déduire la convexité de f ainsi que les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 22 corrigé disponible

Partie A. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = -g$ et $g(0) = 1$. On pose, pour tout réel x, $h(x) = g(-x)$.

1. Calculer $h(0)$.

2. Exprimer, pour tout réel x, $h'(x)$ en fonction de $h(x)$.

3. En déduire, pour tout réel x, l'expression de $h(x)$ puis de $g(x)$ en fonction de x.

Partie B. On considère une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 1$ et

$$(*) \text{ pour tout nombre réel } x,\ [f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1.$$

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.

b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de $(*)$, démontrer que, pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$.

3. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

c. En déduire les fonctions u et v.

d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Partie C. Dans cette partie, on considère la fonction f de la **Partie B** dont on a établi l'expression en question **B.3.d.**

1. Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflexion de sa courbe.

2. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Soit m un nombre réel.

a. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α_m dans $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que $e^{\alpha_m} = m + \sqrt{m^2 + 1}$.

Partie D (facultatif). Les résultats de la partie précédente montrent qu'à tout réel x, on peut associer un unique réel α_x tel que $f(\alpha_x) = x$. On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ une fonction $k : x \mapsto \alpha_x$. On admet que cette fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$. En considérant la fonction $f \circ k$, montrer que, pour tout réel x,

$$k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$