

$$2. f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{3x^2 + 5} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 + \frac{5}{x^2}\right)}$$

$$3. f(x) = \frac{-4x + 1}{x^2 + 1}$$

$$4. f(x) = \frac{3x^4 + 1}{3x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x^2}\right) = 3$$

Par quotient de limites  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$

$$f(x) = \frac{x \left(-4 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{-4 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$   
Donc, par produit et quotient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-4 + \frac{1}{x}\right) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$4) f(x) =$$

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{3x + 1} = \frac{x^4 \left(3 + \frac{1}{x^4}\right)}{x \left(3 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$f(x) = \frac{x^3 \left(3 + \frac{1}{x^4}\right)}{3 + \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^4}\right) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 4 corrigé disponible

Etudier la limite à droite et à gauche de  $a$  pour chacune des fonctions suivantes

- $f(x) = \frac{x^3}{1-2x}$  ;  $a = \frac{1}{2}$
- $f(x) = \frac{1}{x-1}$  ;  $a = 1$
- $f(x) = \frac{4x-5}{1-x}$  ;  $a = 1$

$$3) f(x) = \frac{4x-5}{1-x}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} 4x - 5 = -1$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - x = 0^-$   
Par quotient,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 4x - 5 = -1$$

$$x < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0^+$$

$$x < 1$$

$$x < 1$$

## Exercice 10 corrigé disponib

Déterminer les limites suivantes (On

1.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{(3-x)^2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

5.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{5x^2 - 1}$

6.

$x \rightarrow 3$   
 $x < 3$   $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 + 1 = 28$

$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3 = 0^-$   
 $x > 3$   
 $x < 3$

$f(x) = 2x$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

$2x + \sqrt{5x^2 - 1}$

$2x + \sqrt{x^2 \left( 5 - \frac{1}{x^2} \right)}$

$2x + \sqrt{x^2} \times \sqrt{5 - \frac{1}{x^2}}$

$2x - x \times \sqrt{5 - \frac{1}{x^2}}$

$x \left( 2 - \sqrt{5 - \frac{1}{x^2}} \right)$

Par produit et quotient

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

6.

Soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{4; 3\}$  par  $g(x) = \frac{2x-6}{-x^2+7x-12}$ . Déterminez  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

**entier**  $g(x) = \frac{x(2-\frac{6}{x})}{x^2(-1+\frac{7}{x}-\frac{12}{x^2})} = \frac{1}{x} \times \frac{2-\frac{6}{x}}{-1+\frac{7}{x}-\frac{12}{x^2}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{6}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{7}{x} - \frac{12}{x^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{6}{x}}{-1 + \frac{7}{x} - \frac{12}{x^2}} = \boxed{-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{Par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

On que, pour tout réel  $x \neq 2$ .

$$= \frac{ax+b}{1} + \frac{c}{(x-2)} + \frac{d}{(x-2)^2}$$

compos de son ensemble de définition.

$$= \frac{(ax+b)(x-2)^2 + c(x-2) + d}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(a+b)(x^2-4x+4) + cx - 2c + d}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{ax^3 - 4ax^2 + 4ax + bx^2 - 4bx + 4b + cx - 2c + d}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{ax^3 + (b-4a)x^2 + (c+4a-4b)x + 4b-2c+d}{(x-2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} 2x - 6 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} -x^2 + 7x - 12 = 0^-$$

Par quotient de limites:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) = -\infty$$

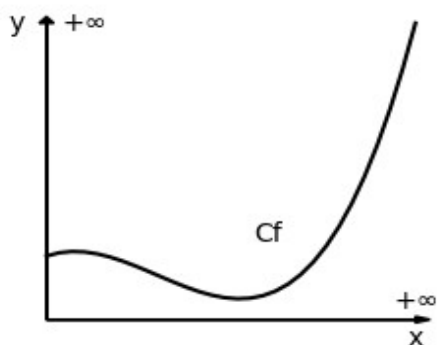
# Limites de fonctions, comportement asymptotique – Fiche de cours

## 1. Limite infinie en l'infini

### a. Définition

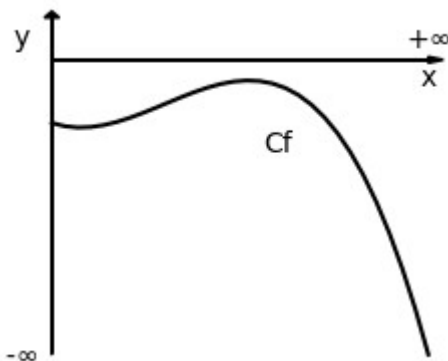
L'infini est un concept qui n'a pas d'équivalent physique ; il s'agit d'une limite

- limite en  $+\infty$  :



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \in ]A; +\infty[$$

- limite en  $-\infty$  :



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \in ]-\infty; A[$$

### b. Limites de références

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

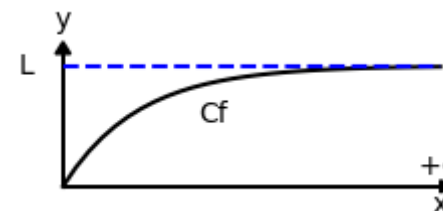
$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ pair} \\ -\infty & n \text{ impair} \end{cases}$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

## 2. Limite réelle en l'infini

### a. Définition



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall A > 0 \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \in ]L - A; L + A[$$

### b. Limites de références

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

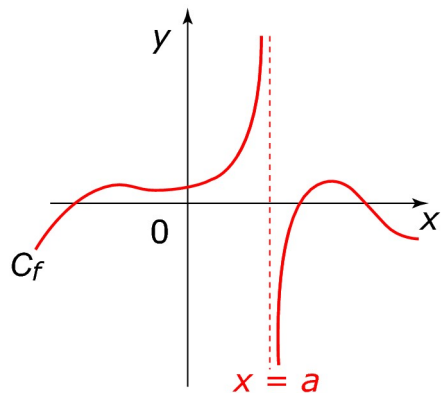
$$- \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

### c. Asymptote horizontale

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$  la droite d'équation  $y = L$  est asymptote horizontale à la courbe représentative de  $f$  en  $\pm\infty$

### 3. Limite infinie pour un réel

#### a. Mise en évidence



#### b. Limites de références

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$- \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$- \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$- \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n \text{ pair} \\ -\infty & n \text{ impair} \end{cases}$$

#### c. Asymptote verticale

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$  la droite d'équation  $x=a$  est asymptote verticale à la courbe représentative de f

### 4. Croissances comparées

$$- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \cdot e^x = 0$$

### 5. Opérations sur les limites

#### a. Somme de deux fonctions

$\lim f$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

#### b. Produit de deux fonctions

$\lim f$	$l$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
$\lim g$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$(\pm\infty)$
$\lim f \cdot g$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

#### c. Quotient de deux fonctions

Limite d'un quotient									
Si f a pour limite en a	$l$	$l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$l$	$0$
Si g a pour limite en a	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	$0^+$	$0$
Si $\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$\frac{l}{l'}$	$0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$\pm\infty$	FI

#### d. Limite d'une fonction rationnelle en l'infini

La limite d'un polynôme en l'infini est égale à la limite de ses monômes de plus haut degré en l'infini

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^2 + 5x - 1$$

#### e. Limite d'une composée de deux fonctions

si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$  et  $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = c$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

## 6. Limites et inégalités

### a. Comparaison de limites finies

$$\text{si } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} g(x) = L'$$

$$\text{alors } L \leq L'$$

### b. Théorèmes de comparaison

- comparaison avec  $-\infty$  :

$$\text{si } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} g(x) = -\infty$$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} f(x) = -\infty$$

- comparaison avec  $+\infty$  :

$$\text{si } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} f(x) = +\infty$$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} g(x) = +\infty$$

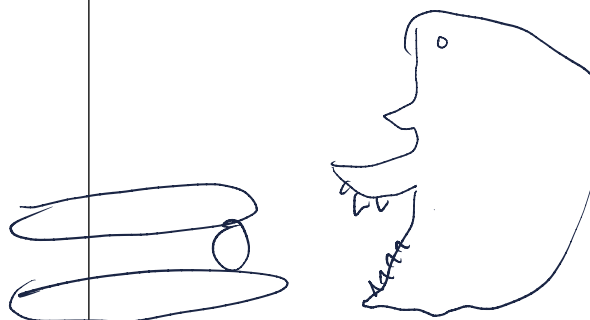
### c. Théorème d'encadrement dit « théorème des gendarmes »

$$\text{si } \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} g(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} h(x) = L$$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} f(x) = L$$

## 7. Asymptote oblique

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ax + b \Leftrightarrow$  la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote oblique à la courbe représentative de  $f$  en  $\pm\infty$

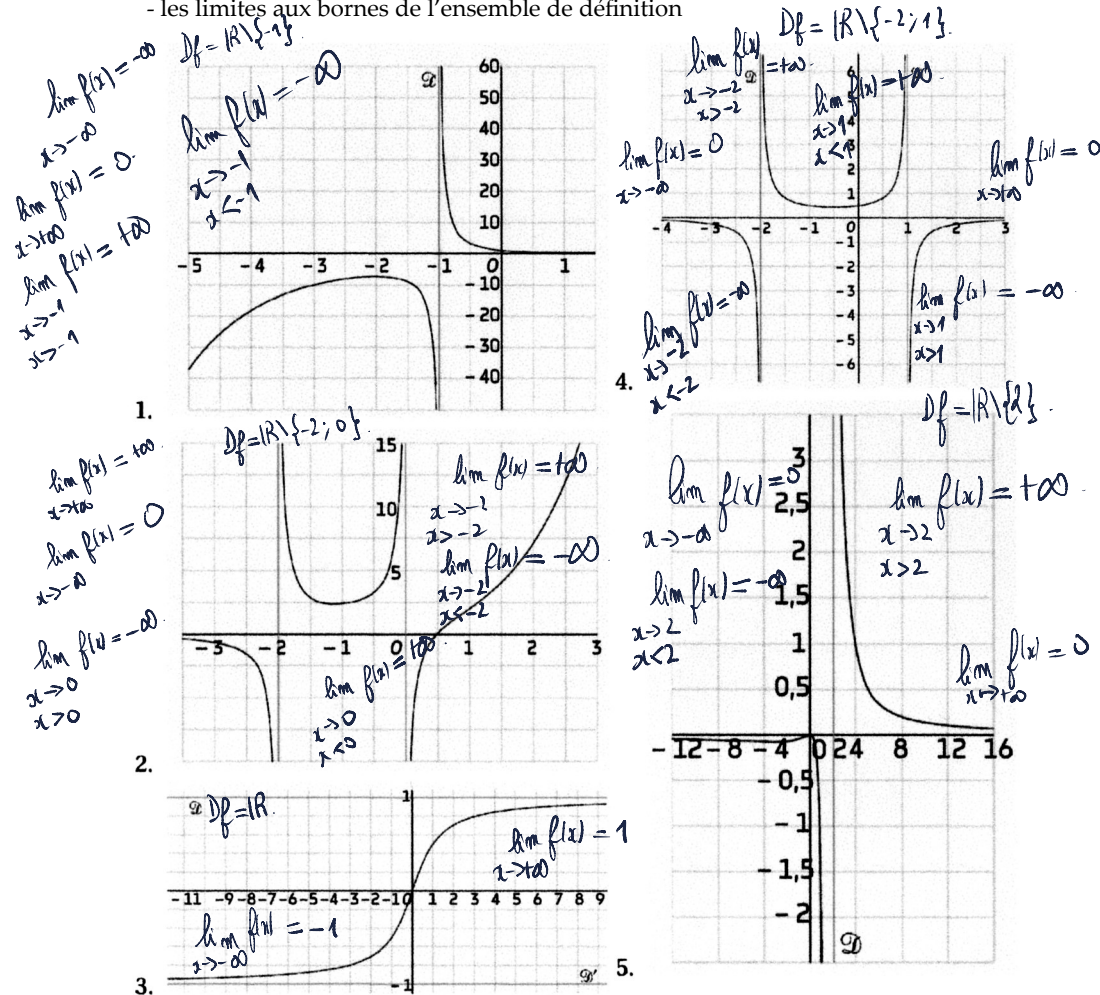


# Limites de fonctions – Comportement asymptotique - Exercices

## Exercice 1 corrigé disponible

Dans chacun des cas suivants, on donne la représentation graphique d'une fonction  $f$  ainsi que les éventuelles asymptotes. En déduire :

- le domaine de définition de  $f$
- les limites aux bornes de l'ensemble de définition



## Exercice 2 corrigé disponible

Dans chacun des cas suivants, on donne certaines limites d'une fonction  $f$ . Donner une interprétation graphique de chacune de ces limites.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ .
- $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -\infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ .

$$\frac{1}{\frac{3}{x}} = \frac{1}{x} \times \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$$

## Exercice 3 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \times g)(x)$
- $f(x) = \frac{1}{x}$  ;  $g(x) = \frac{3}{x}$
  - $f(x) = x^2$  ;  $g(x) = \frac{1}{x}$  ;  $x \times \frac{1}{x} = 1$
  - $f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{x \times 1}{x(\frac{1}{x} + 1)} = \frac{1}{\frac{1}{x} + 1}$  ;  $g(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{x \times 1}{x(\frac{1}{x} - 1)} = \frac{1}{\frac{1}{x} - 1}$

## Exercice 4 corrigé disponible

Etudier la limite à droite et à gauche de  $a$  pour chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{x^3}{1-2x}$  ;  $a = \frac{1}{2}$
- $f(x) = \frac{1}{x-1}$  ;  $a = 1$
- $f(x) = \frac{4x-5}{1-x}$  ;  $a = 1$

### Exercice 5 corrigé disponible

Déterminer les limites en  $-\infty$  et en  $+\infty$  des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{4x-1}{3x+1}$   $\xrightarrow{+\infty} = \frac{x(4-\frac{1}{x})}{x(3+\frac{1}{x})} = \frac{4-\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x}}$

2.  $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{3x^2+5}$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 - \frac{1}{x} = 4$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{4}{3}$

3.  $f(x) = \frac{-4x+1}{x^2+1}$

4.  $f(x) = \frac{3x^4+1}{3x+1}$

### Exercice 6 corrigé disponible

$f$  est définie sur  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$  par :  $f(x) = \frac{2x - \sin x}{3x+1}$

1. Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\frac{2x-1}{3x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{3x+1}$$

2. En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

### Exercice 7 corrigé disponible

On définit  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$

1. Prouver que pour tout réel  $x \geq 0$  :  $4x^2 \leq 4x^2+x+1 \leq (2x+1)^2$

2. En déduire que pour tout réel  $x > 0$  :  $2 \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x}$

3. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

### Exercice 8 corrigé disponible

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2-2x+3}}{x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-3x+2}{x+1}$

### Exercice 9 corrigé disponible

On considère 3 fonctions  $f, g$  et  $h$ , définies sur  $\mathbb{R}$ , telles que pour tout nombre réel  $x$ , on a :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si l'on sait que l'on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , alors on peut en déduire :

Réponse A :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Réponse B :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Réponse C :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

### Exercice 10 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes (On justifiera soigneusement) :

1.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-5x+6}{(3-x)^2}$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - \sqrt{2x^2+3}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3+1}{x^2-2x-3}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{3x+4}-4}{4-x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{5x^2-1}$

6.

Soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{4; 3\}$  par  $g(x) = \frac{2x-6}{-x^2+7x-12}$ . Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$  et  $4^+$ .

### Exercice 11 corrigé disponible

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

#### Vrai-Faux

Pour chacune des affirmation ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1) Si pour tout  $x > 0$ , on a  $f(x) \leq \frac{2}{x}$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

2) Si pour tout  $x > 0$ , on a  $2 + \frac{2}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

3) Si pour tout  $x > 0$ , on a  $1 + \frac{3}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  avec  $\ell \in [1; 2]$ .

4) Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ ,  $\mathcal{C}_f$  ne coupe pas la droite d'équation  $y = a$ .

### Exercice 12 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{(2-x)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{(2-x)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - \sqrt{2x^2 + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x - \sqrt{2x^2 + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3} - 3}{2-x}$

### Exercice 13 corrigé disponible

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-\infty, 0[$  par :

$$f(x) = x^3 - \cos x$$

1. Démontrer que l'on a pour tout  $x \leq 0$  :

$$f(x) \leq x^3 + 1$$

2. En déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

### Exercice 14 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5 - \frac{4}{x^2}}$    b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4$    c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{2-x}{x}}$    d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 9 - \frac{16}{x^2 + 4}}$

### Exercice 15 corrigé disponible

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ .

- Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
- a. A quelle forme indéterminée la limite de  $f$  en  $+\infty$  conduit-elle?  
b. Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ .  
c. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

### Exercice 16 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 12)$    b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 3)$    c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x + 2}{3x - 7}$    d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 2x}{3x^3 - 7}$   
e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9x + 2}{x - 3}}$    f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9x + 2}{x - 3}}$    g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - x + \frac{1}{x^2}\right)$    h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - x + \frac{1}{x^2}\right)$

### Exercice 17 corrigé disponible

Vrai ou faux

- Si pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \geq x^2$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- Si pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f(x) \leq \frac{1}{x}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
- Si pour tout réel  $x$  strictement positif,  $1 \leq f(x) \leq x$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ .

### Exercice 18 corrigé disponible

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fautive et justifier la réponse (éventuellement par une définition ou un dessin) :

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , alors il existe un réel  $m$  tel que si  $x > m$ , alors  $f(x) > 10^4$ .
- Si  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ , alors il existe un intervalle de la forme  $]m; +\infty[$  tel que pour tout  $x \in ]m; +\infty[$ ,  $f(x) < 0$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ , alors la droite d'équation  $y = -1$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$ .

### Exercice 19 corrigé disponible

Déterminer les limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 7\sqrt{x} + 2}{-3 + x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$ .

### Exercice 20 corrigé disponible

Déterminer :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 5}{4x + 1}}$  ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x)$  ;
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x+2}$ .

$$2x^2 + 3x + 5 = ax^2 + bx + c$$

### Exercice 21 corrigé disponible

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} - \{2\}$  par :  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2}$

On note (C) la courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer les réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que, pour tout réel  $x \neq 2$  :

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2} + \frac{d}{(x-2)^2}$$

- Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- Montrer que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = x + 1$  est asymptote la courbe (C).
- Donner l'équation de la droite ( $D$ ), autre asymptote à (C).

### Exercice 22 corrigé disponible

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$  par :  $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 11}{2x + 3}$

C est la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthogonal (unité graphique : 1cm).

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^-} f(x)$ . Donner une interprétation graphique.

$$x \rightarrow -\frac{3}{2}^+ \quad x \rightarrow -\frac{3}{2}^-$$

2. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ , on a :  $f(x) = x + 1 + \frac{8}{2x + 3}$

Etudier alors la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

3. Soit  $D$  la droite d'équation  $y = x + 1$ .

Montrer que  $D$  est une asymptote oblique à  $C$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

### Exercice 23 corrigé disponible

Déterminer la limite de chacune des fonctions dans l'endroit indiqué.

$$f_1(x) = \frac{x-4}{x^2+3x+2} \text{ en } -2^-.$$

$$f_2(x) = x^3 - x^2\sqrt{x}; \text{ en } +\infty.$$

$$f_3(x) = (-3x^2 + 5x - 11)^{111}; \text{ en } +\infty$$

$$f_4(x) = \frac{x^5 + 4x^2 + 3\pi}{5 - x^2}; \text{ en } -\infty.$$

$$f_5(x) = \frac{\sin((x-1)^2)}{x-1}; \text{ en } 1$$

$$f_6(x) = \frac{\cos(3x) + x}{x+2}; \text{ en } -\infty$$

### Exercice 24 corrigé disponible

Par un encadrement judicieusement choisi, déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2 - \cos x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x \sin x$$

### Exercice 25 corrigé disponible

Déterminer les limites en  $-\infty$  et  $+\infty$  des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = e^{-3x} \quad b) g(x) = e^x + e^{-x} \quad c) h(x) = x + e^x \quad d) k(x) = e^{2x} + e^x + 1$$

$$e) l(x) = e^{3x} - e^x \quad f) m(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + 2} \quad g) n(x) = \frac{-2e^x}{1 + e^x}$$

### Exercice 26 corrigé disponible

Déterminer la limite en  $+\infty$  des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = x^2 + 2 - e^x \quad b) g(x) = \frac{2e^x - x}{x^2} \quad c) h(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

$$d) l(x) = e^{2x} - (x+1)e^x \quad e) k(x) = \frac{\sqrt{e^x + 2}}{x} \quad f) t(x) = \frac{e^{2x} + x^2}{x^2 + x - 3}$$

### Exercice 27 corrigé disponible

Déterminer les limites des fonctions suivantes en  $+\infty$  et en  $-\infty$

Préciser l'équation des éventuelles asymptotes

$$1. f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$2. f(x) = e^x - x$$

$$3. f(x) = e^{2x} - xe^x + 1$$

$$4. f(x) = x^4 - 2xe^x + e^2$$

$$5. f(x) = 2x^3 + 3x - \frac{1}{x}$$

$$6. f(x) = (e^{2x} - 1)(1 - e^x) + \frac{1}{x}$$

$$7. f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}-1} + e^x$$

$$8. f(x) = \frac{-2}{x^3+2x} + \sqrt{x^2}$$

### Exercice 28 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^2 - x + 3}{x - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 4x}{-x^2 - 2x + 8}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 9^-} \frac{\sqrt{9 - x}}{x^2 - 81}$$

### Exercice 29 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x(-x - 1)}{(x^2 + 2)(x + 3)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{(x + 2)(x - 5)}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 5x - 1}{4x^2 + x + 1}$$

### Exercice 30 corrigé disponible

Déterminer les limites des fonctions suivantes à l'endroit indiqué.

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2 - 3}{x - 3x^2}\right) \text{ sur } D = \mathbb{R}_+^*. \text{ Limite en } +\infty. \quad \left| \quad g(x) = \frac{2x + 2}{3x^2 + 7x + 4}. \text{ Limite en } -1.$$

### Exercice 31 corrigé disponible

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x} \cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$

Déterminer les limites de  $f$  et  $g$  aux bornes de leur domaine de définition

### Exercice 32 corrigé disponible

Déterminer les limites en  $-\infty$  et  $+\infty$  des fonctions suivantes.

a.  $f(x) = e^x - x$

b.  $f(x) = (x + 1)e^x$

c.  $f(x) = 4xe^{-x}$

d.  $f(x) = x - e^{-x}$

e.  $f(x) = \frac{e^x - 4}{e^x + 2}$

f.  $f(x) = \frac{e^x}{x - 1}$

### Exercice 33 corrigé disponible

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \left(\frac{1 - x^2}{x}\right)e^{-x}$

Répondre par vrai ou faux en justifiant sa réponse.

A.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

B. la droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote à la courbe représentative de  $f$  quand  $f$  tend vers  $+\infty$ .