

$$az^2 + bz + c$$

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

$$z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$

EXERCICE 20

Trouver les complexes p et q tels que l'équation : $z^2 + pz + q = 0$ admette pour solutions les nombres : $1 + 2i$ et $3 - 5i$

Soit $p, q \in \mathbb{C}$.

$$\Delta = p^2 - 4q < 0$$

$$z_1 = \frac{-p - i\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$z_2 = \frac{-p + i\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$\begin{aligned} z^2 + pz + q &= (z - 1 - 2i)(z - 3 + 5i) \\ &= z^2 - 3z + 52i - 2z + 3 - 5i - 2iz + 6i + 10 \\ &= z^2 - 4z + 32i + i + 13 \\ &= z^2 + 2(-4 + 3i)z + i + 13 \end{aligned}$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux

donc $p = (-4 + 3i)$ et $q = (13 + i)$

Rappel de cours: Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si P et Q sont de même degré et si leurs coefficients sont respectivement égaux.

$$P_m(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_m x^m$$

$$= \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

$$P_m(x) = Q_m(x)$$

$$Q_m(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad a_m = b_m$$

Les nombres complexes

I-PRESENTATION

1. Ensemble des nombres complexes

Définition du nombre i

Dans ce cours, on admet qu'il existe un ensemble de nombres noté \mathbb{C} qui contient l'ensemble des nombres réels et qui vérifie un certain nombre de propriétés :

- \mathbb{C} possède un nombre i tel que $i^2 = -1$.
- Tous les éléments de \mathbb{C} s'écrivent sous la forme $a + ib$ où a et b sont des réels.
- \mathbb{C} est doté de l'addition et de la multiplication et possède les mêmes propriétés que dans l'ensemble des nombres réels.

Si un ensemble vérifie toutes ces propriétés, alors il s'agit de l'ensemble des nombres complexes.

2. La forme algébrique

Théorème

Tous les nombres complexes peuvent s'écrire sous la forme $z = a + ib$ où $z \in \mathbb{C}$ et $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ (a et b sont des réels)

Définition

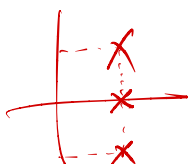
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors, la partie réelle de z est notée $Re(z)$ et $Re(z) = a$.

De plus, la partie imaginaire de z est notée $Im(z)$ et $Im(z) = b$.

Remarque : Attention, de nombreux élèves se trompent en prenant pour partie imaginaire $Im(z) = ib$ alors que i ne fait pas partie de la partie imaginaire.

Exemple

La partie imaginaire de $z = -2 - 4i$ n'est pas $-4i$ mais -4 .



Théorème

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont respectivement égales. En effet, si :

$$a + ib = x + iy$$

alors,

$$a = x \text{ et } b = y$$

3. Module et conjugué d'un nombre complexe

Définition du conjugué

Tous les nombres complexes possèdent un unique nombre conjugué. Soit $z = a + ib$ où a et b sont des réels, alors le conjugué de z noté \bar{z} , s'exprime par la formule suivante :

$$\bar{z} = a - ib$$

De cette définition découlent un certain nombre de propriétés à connaître par cœur et à **savoir démontrer**.

Exemple

Si $z = 2 - 3i$ alors $\bar{z} = 2 + 3i$

Propriétés (règles de calcul)

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ où z' est non nul.
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ où n est un entier relatif.
- $z + \bar{z} = 2Re(z)$ et $z - \bar{z} = 2iIm(z)$
 $x+iy + x-iy = 2x$
- z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$

$\frac{1}{z^0} = 1$

$\frac{1}{z^1} = 1$

$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^n} \times z$

$= \frac{1}{z^n} \times z$

$= \frac{1}{z^{n-1}}$

$\frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{z^{n+1}}$

$z = a + ib$

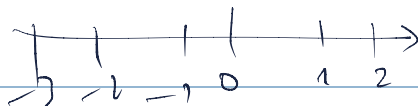
$\bar{z} = a - ib$

$x+iy = -(x-iy)$

$x+iy = -x+iy$

$2x = 0$

$\boxed{x=0}$

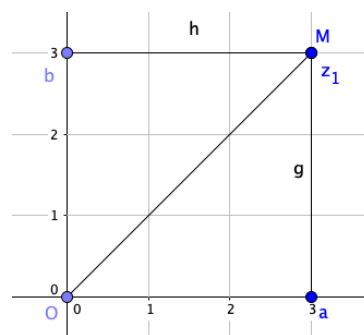
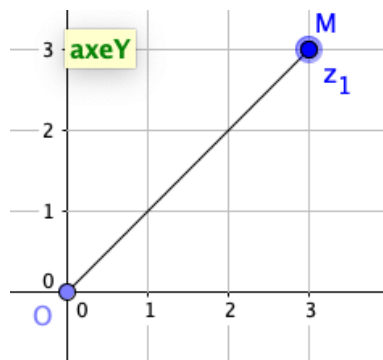


Définition du module

Soit z un nombre complexe défini sous sa forme algébrique : $z = a + ib$. Alors, le module de z se note $|z|$ et se calcule ainsi :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Géométriquement, $|z|$ représente la distance entre le point O et le point M d'affixe z .



De la même manière que pour un point, on peut également parler d'affixe pour un vecteur : soit $\vec{u}(a; b)$ alors l'affixe du vecteur \vec{u} se note $z_{\vec{u}}$ et vaut $z_{\vec{u}} = a + ib$

Propriété

Soient deux points du plan A et B qui ont pour affixes respectifs : z_a et z_b . Alors :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

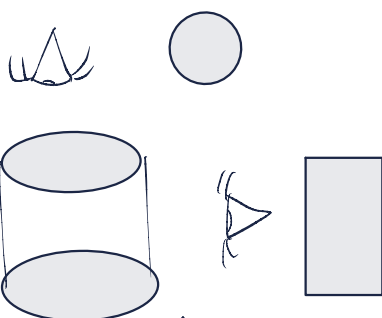
Propriétés et règles de calcul

- $z \times \bar{z} = |z|^2$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z|^n = |z^n|$

4. Complexes et géométrie plane

Définition d'affixe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $R(O; \vec{u}; \vec{v})$. Alors à tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe un unique point M du repère R où M a pour coordonnées $(a; b)$. Ainsi, il y a une correspondance entre l'ensemble des nombres complexes et le plan. Dès lors z est appelé affixe du point M .



$z = x + iy$ algébrique
 $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ forme trigo.
 $z = |z|e^{i\theta}$

Conséquences immédiate

Soient A et B deux points du plan, alors :

$$AB = |z_B - z_A|$$

II- LES EQUATIONS DU SECOND DEGRE

En classe de première vous avez appris à résoudre les équations du second degré du style :

$$ax^2 + bx + c = 0, a \in \mathbb{R}^*, (b; c) \in \mathbb{R}$$

Si le discriminant de cette équation était négatif, alors on affirmait à juste titre que cette équation n'a pas de solutions réelles. En effet, elle n'a pas de solutions réelles mais elle possède des solutions complexes conjuguées l'une de l'autre. On a :

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ où } a \neq 0$$

$$\text{Si } \Delta = b^2 - 4ac < 0, \text{ alors :}$$

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

On remarquera que $z_2 = \bar{z}_1$

III. FORME TRIGONOMETRIQUE

1. Module et argument

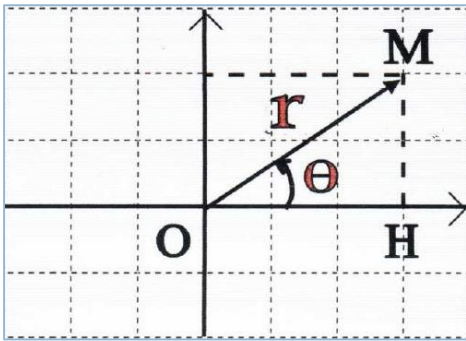
Définitions

Soit P le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit M le point d'affixe $z = a + ib$. Ainsi, M a pour coordonnées $M(a; b)$.

Le module de z noté $|z|$ correspond géométriquement à la distance OM . On note :

$$|z| = OM$$

De plus, l'argument de z (différent de 0) noté $\arg(z)$ correspond géométriquement à l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.



$|z| = 2$
 $\theta = \frac{\pi}{4}$
 $z = 2i$

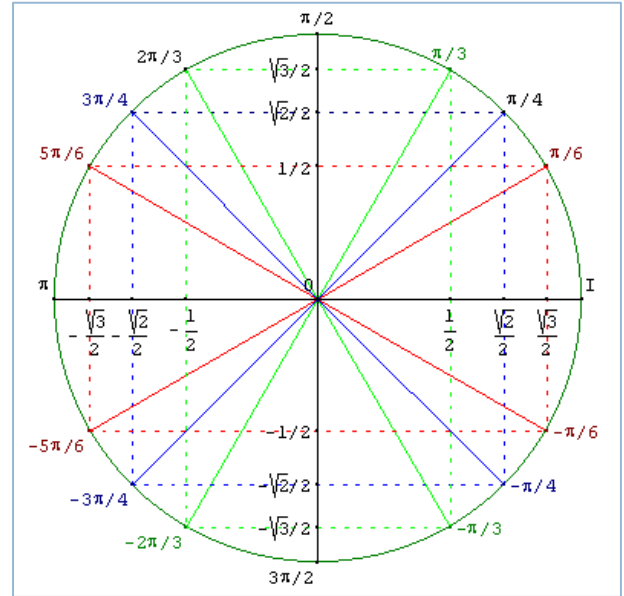
$$\cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|}$$

$$\sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|}$$

Application

Déterminer le module et l'argument de $z = 1 + i$.

2. Angles remarquables dans le cercle trigonométriques



Remarques

Le nombre complexe 0 n'a pas d'arguments mais possède un module égal à 0.
 Le module d'un nombre est toujours positif.
 Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments du fait de la cyclicité du cercle trigonométrique.

Dans la pratique ça donne quoi ?

Dans les exercices vous serez amenés à calculer le module et l'argument de différents nombres complexes. Pour cela il suffit d'appliquer les formules suivantes :

- Pour le module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ où a et b sont des nombres réels correspondant respectivement à la partie réelle et la partie imaginaire du nombre z .
- Pour l'argument c'est un peu plus compliqué : il faut résoudre le système suivant d'inconnue θ :

$z = 1 + i$
 $|z| = \sqrt{2}$
 $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\theta = \frac{\pi}{4}$

3. Forme trigonométrique

Définition

Tout nombre complexe, peut s'écrire sous la forme :

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Cette forme s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe z .

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes. On a alors :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \end{cases}$$

La démonstration est triviale et sera faite à l'oral.

4. Quelques formules de trigonométries

Formule d'addition

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Démonstration en exercice

Formule de duplication

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
 $= 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Démonstrations en exercice

IV. FORME EXPONENTIELLE

1. Définition

Définition

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme :

$$z = |z| \times e^{i\theta}$$

Où :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

2. Formules d'Euler et de Moivre

Formule d'Euler

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$

V. LES RACINES n -IEMES DE L'UNITE

Définition

On appelle cercle unité, et on note \mathbb{U} , l'ensemble des nombres complexes de module 1. Donc $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

Propriété

Soient deux nombres complexes z et z' dans \mathbb{U} alors on a :

- $zz' \in \mathbb{U}$
- $\frac{z}{z'} \in \mathbb{U}$

Démonstrations en exercice

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racines n -ièmes de l'unité les solutions de l'équation :

$$z^n = 1$$

Propriété

Les solutions de l'équation précédente sont dans l'ensemble suivant :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n-1 \right\}$$

Si $n \geq 3$, alors les points dont les affixes sont les racines n -ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés.

Démonstrations en exercice