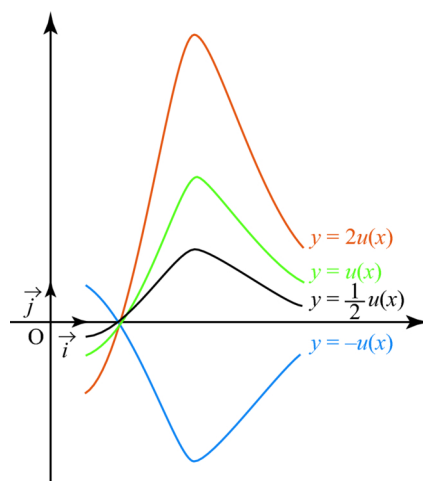


# FONCTIONS DE REFERENCES ET VARIATIONS DE FONCTIONS ASSOCIEES



## Chapitre 2

## Fonctions de références et variations de fonctions associées

Classe de première. Il s'agit d'un chapitre très important qui va poser les bases de toute la suite.

# Fonctions de références et variations de fonctions associées

# I. FONCTION MATHÉMATIQUE

## 1. Définition

Une fonction numérique notée  $f$  est une relation qui à un nombre réel  $x$  associe un unique nombre réel  $y$  noté  $f(x)$ . On écrit alors :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

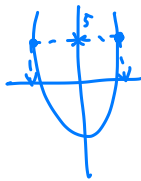
$$x \mapsto f(x)$$

### Vocabulaire

- On dit que  $f(x)$  est l'image de  $x$  par  $f$ . (image unique)
- $x$  est un antécédent de  $f(x)$  par  $f$ . (il peut y avoir plusieurs antécédents)

### Exemples

- $f(x) = 2x - 5$  est une fonction affine.
- $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$  est une fonction du second degré.



## 2. Ensemble de définition

### Définition

L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des valeurs de la variable  $x$  que la fonction  $f$  peut transformer.

### Exemple, exercices d'application

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f(x) = \frac{4}{2x^2 + 3x - 2}$

ainsi que de la fonction  $f(x) = \sqrt{4x + 2}$ .

$$2x^2 + 3x - 2 = 0.$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25. > 0, \text{ il existe donc deux solutions réelles:}$$

$$S_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{-3 - 5}{4} = -2.$$

$$S_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}.$$

$$Y = ] -2; \frac{1}{2} [.$$

Et la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus Y$ .

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus ] -2; \frac{1}{2} [.$$

$$\sqrt{4x+2} \text{ définie ssi } 4x+2 \geq 0.$$

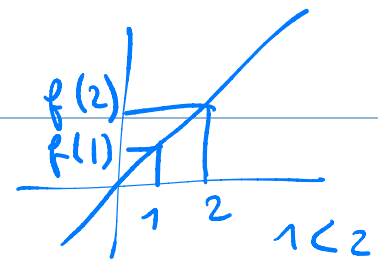
$$4x+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4x \geq -2$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus ] -\infty; -\frac{1}{2} [.$$

$$= [-\frac{1}{2}; +\infty [.$$

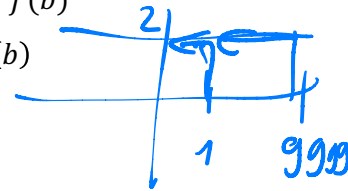


# I. VARIATIONS DE FONCTIONS

## Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Soient  $a$  et  $b$  deux réels de cet intervalle  $I$ . Alors on dit que

- $f$  est <sup>strictement</sup> croissante sur  $I$  si et seulement si pour tout  $a$  et  $b$ , on a :  $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
- $f$  est décroissante sur  $I$  si et seulement si pour tout  $a$  et  $b$ , on a :  $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
- $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si pour tout  $a$  et  $b$ , on a :  $a < b \Rightarrow f(a) = f(b)$
- $f$  est monotone sur  $I$  si et seulement si  $f$  est croissante ou décroissante sur  $I$ .



## Méthode pour étudier les variations

Pour étudier les variations d'une fonction monotone sur un intervalle  $I$ , on choisit d'abord des réels  $a$  et  $b$  sur cet intervalle  $I$  tels que  $a < b$ . Ensuite on réduit et on factorise si possible l'expression  $f(b) - f(a)$ . Alors s'en suit deux cas :

$$a < b \quad f(b) - f(a) > 0. \quad \Rightarrow f(b) > f(a)$$

- Si  $f(b) - f(a) > 0$  alors la fonction  $f$  est croissante.
- Si  $f(b) - f(a) < 0$  alors la fonction  $f$  est décroissante.

$$f(b) < f(a)$$

## Exemple, exercice d'application

Soit la fonction  $f(x) = 4x - 4$ . Démontrer que cette fonction est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que :  $a < b$ .

$$f(a) = 4a - 4 = 4(a - 1).$$

$$f(b) = 4b - 4 = 4(b - 1).$$

$$f(a) - f(b) = 4a - 4 - (4b - 4).$$

$$= 4a - 4 - 4b + 4.$$

$$= 4a - 4b.$$

$$= 4(a - b).$$

$$g(x) = x^2 - 8x + 3.$$

$$\text{sur } [4; +\infty[ = I_g$$

Soient  $(a, b) \in I_g$  tels que  $4 \leq a < b$ .

$$g(a) = a^2 - 8a + 3$$

$$g(b) = b^2 - 8b + 3.$$

$$g(a) - g(b) = a^2 - 8a + 3 - (b^2 - 8b + 3)$$

$$= a^2 - b^2 - 8a + 8b + 3 - 3$$

$$= (a-b)(a+b) - 8(a-b)$$

$$= (a-b)(a+b-8)$$

## II. FONCTIONS DE REFERENCES

### 1. Fonction affine

#### A. DEFINITION-PROPRIETE

Une fonction affine  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  qui peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = ax + b \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

coefficient directeur. ordonnée à l'origine.

- Signe de  $(a-b)$  :  $a < b$  donc  $a-b < 0$ .
- Signe  $(a+b-8)$  :  $a \geq 4$  et  $b > a$  donc :  $a+b > 8$ .  
donc :  $a+b-8 > 0$ .  
(donc :  $g(a) - g(b) < 0$ .  
Autrement dit :  $g$  est croissante.

Soient  $A$  et  $B$  deux points de la fonction  $f$ .  
 $A(x_A; y_A)$   $B(x_B; y_B)$  alors :  $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(B) - f(A)}{x_B - x_A}$ .

**Remarques**

Le signe du coefficient directeur  $a$  donne les variations de la fonction :

- Si  $a$  est positif la fonction est croissante.
- Si  $a$  est négatif la fonction est décroissante.

$$a = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$a > 0 \begin{cases} f(b) - f(a) > 0 & f(b) > f(a) \\ \text{et } b - a > 0 & b > a \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} f(b) - f(a) < 0 & f(b) < f(a) \\ \text{et } b - a < 0 & b < a \end{cases}$$

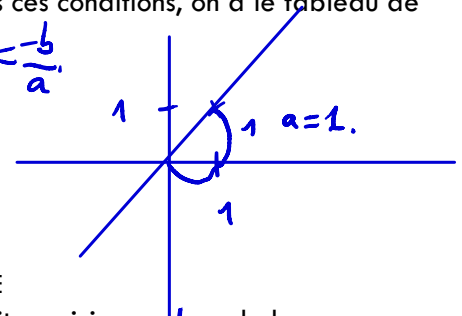
Le nombre  $b$  est appelé l'ordonnée à l'origine.

**B. SIGNE D'UNE FONCTION AFFINE**

Soit  $f$  une fonction affine. On a alors :  $f(x) = ax + b$  où  $a \neq 0$ . Dans ces conditions, on a le tableau de signe suivant :

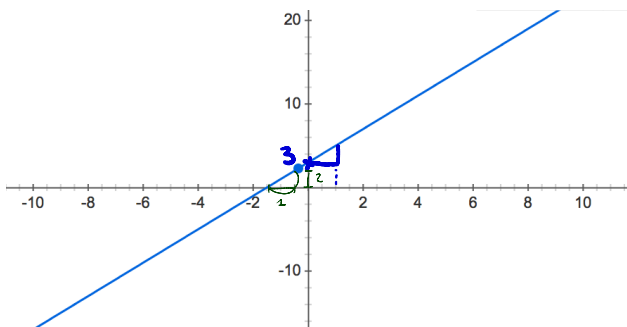
$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$		signe de $a$



**C. REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION AFFINE**

La représentation graphique d'une fonction affine est toujours une droite, voici par exemple la représentation graphique de la fonction  $f(x) = 2x + 3$  :



**2. Fonction carrée**

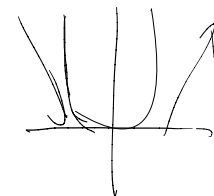
**A. DEFINITION**

La fonction carrée est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2$$

**Remarques**

La fonction carrée est décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  et croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

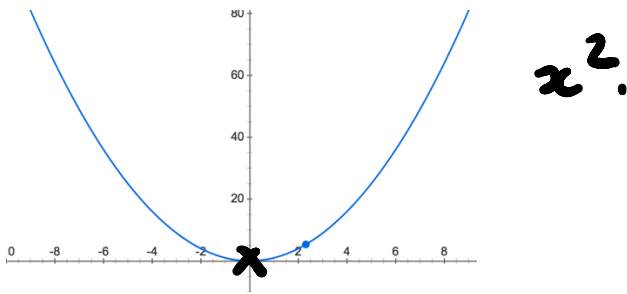


La représentation graphique de la fonction carrée est une parabole dont le sommet est l'origine du repère.

La fonction carrée est toujours positive sur  $\mathbb{R}$ .

B. REPRESENTATION GRAPHIQUE

Voici la représentation graphique de la fonction carrée :



3. Fonction inverse

A. DEFINITION

La fonction inverse est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \quad \mathbb{R}^*$$

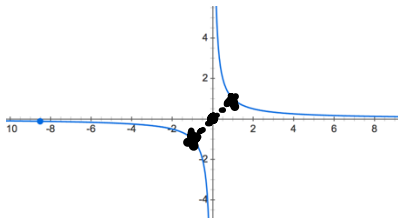
Remarques

La fonction inverse est décroissante sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

La représentation graphique de la fonction inverse est une hyperbole dont le centre de symétrie est l'origine du repère.

B. REPRESENTATION GRAPHIQUE

Voici la représentation graphique de la fonction inverse :



$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
Var. de $f$	↘		↘

4. Fonction racine carrée

A. DEFINITION

La fonction racine carrée est la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} &= x^{\frac{1}{3}} \\ \sqrt[4]{x} &= x^{\frac{1}{4}} \\ \sqrt[n]{x} &= x^{\frac{1}{n}} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

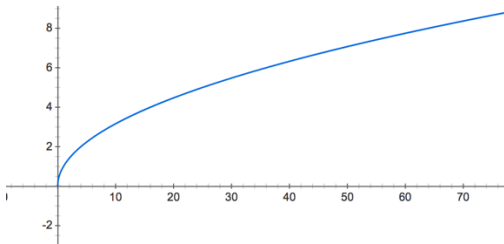
$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

**Remarques**

La fonction racine carrée est croissante et positive sur  $\mathbb{R}_+$ .

**B. REPRESENTATION GRAPHIQUE**

Voici la représentation graphique de la fonction racine carrée :



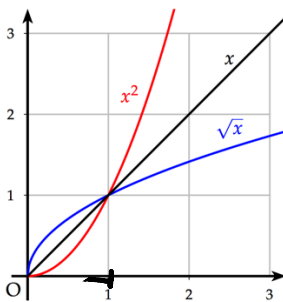
**5. Comparaison des fonctions carrées, identité et racine carrée**

**Théorème**

Pour tous réels  $x$  positif, on a les relations suivantes :

- Si  $x \in [0; 1]$ , alors :  $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$
- Si  $x \in [1; +\infty[$ , alors :  $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$

Illustration graphique de ce théorème



$$\frac{1}{2} = 0,5.$$

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**6. Fonction valeur absolue**

**A. DEFINITION**

La fonction valeur absolue d'un nombre  $x$  notée  $|x|$ , est utilisée lorsqu'on s'intéresse à un nombre sans pour autant s'intéresser à son signe. On a alors :

$$f(x) = x - 2. \quad x - 2 \geq 0?$$

$\begin{cases}  x  = x & \text{si } x \geq 0 \\  x  = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ <p style="font-size: small; margin-top: 0;">ex: <math>  -9   = -(-9) = +9.</math></p>	$\begin{cases}  f(x)  = f(x) & \text{si } f(x) \geq 0. \\  f(x)  = -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0. \end{cases}$
--	---

**Exemples**  $f(x) = x - 2.$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Donc :  $f(x) \geq 0$  sur  $[2; +\infty[.$

$f(x) \leq 0$  sur  $] -\infty; 2].$

Donc :  $|f(x)| = f(x)$  sur  $[2; +\infty[.$

$|f(x)| = -f(x) = 2 - x$  sur  $] -\infty; 2].$

$x \in [0; 1]$  donc:  $0 \leq x \leq 1$

$\sqrt{0} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{1}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \times \sqrt{x} \leq \sqrt{x} \times \sqrt{x} \leq 1 \times \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{x}$

*le sens de l'inégalité ne change pas car la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est croissante sur  $[0; 1]$ .*

*le sens de l'inégalité ne change pas car  $\sqrt{x} > 0$  sur  $[0; 1]$ .*

$x \in [0; 1]$  donc:  $0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \times x \leq x \times x \leq 1 \times x$

$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq x$

*le sens de l'inégalité ne change pas car  $x > 0$ .*

Donc:  $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$  sur  $[0; 1]$ .

$x \in [1; +\infty[$  donc:  $x \geq 1$

$\Leftrightarrow x \times x \geq x$

$\Leftrightarrow x^2 \geq x$

*le sens de l'inégalité ne change pas car  $x > 0$ .*

$x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{1} \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \times \sqrt{x} \geq \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{x}$

*le sens de l'inégalité ne change pas car la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ .*

*le sens de l'inégalité ne change pas car  $\sqrt{x} > 0$  sur  $[1; +\infty[$ .*

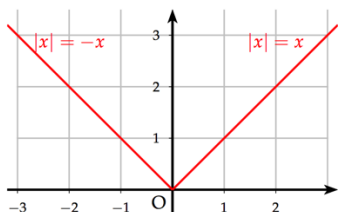
Donc:  $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$  sur  $[1; +\infty[$ .

B. PROPRIETES SUR LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

- $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$   $\sqrt{3^2} = |3| = 3.$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$  (Inégalité triangulaire). **+démon**  
 $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3.$

C. VARIATIONS ET REPRESENTATION GRAPHIQUE

La fonction valeur absolue est décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  et croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Voici sa représentation graphique :



**+ complément cours.  
fonctions paires / impaires.**

III. SENS DE VARIATION DES FONCTIONS ASSOCIEES

1. Somme de fonctions

**Théorème**

Soit  $k$  un réel et deux fonctions  $u$  et  $v$  définies sur un intervalle  $I$ . Alors :

- Les fonctions  $u$  et  $u + k$  ont les mêmes variations.
- Si les fonctions  $u$  et  $v$  sont croissantes alors la fonction  $u + v$  est croissante.
- Si les fonctions  $u$  et  $v$  sont décroissantes alors la fonction  $u + v$  est décroissante.
- Si les fonctions  $u$  et  $v$  sont de variations contraires alors on ne peut pas connaître à l'avance les variations de la fonction  $u + v$ .

**Exemples**



2. Produit par une constante

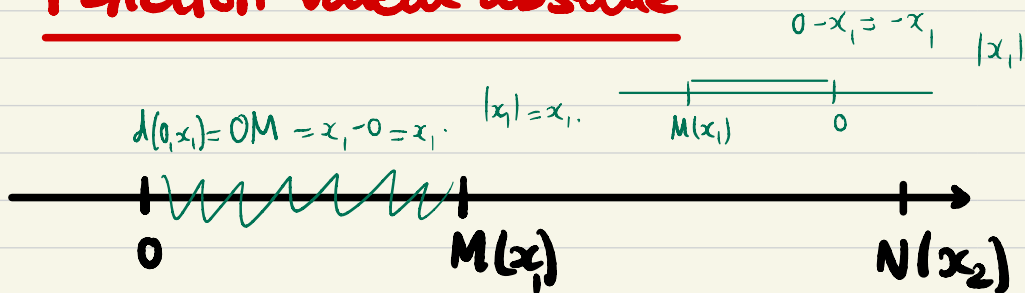
Soit un réel  $\lambda$  et une fonction  $u$  définie sur un intervalle  $I$ . Alors :

- Si  $\lambda > 0$ , alors  $u$  et  $\lambda u$  ont les mêmes variations.
- Si  $\lambda < 0$ , alors  $u$  et  $\lambda u$  sont de variations contraires.

**Exemples**



# Fonction valeur absolue



• Soit une droite graduée d'origine 0, soit M un point d'abscisse  $x_1$ , et N un point d'abscisse  $x_2$ .

• On appelle **distance entre les points 0 et M**, notée  $d(0, x) = OM$  :

$$\begin{cases} d(0, x) = x & \text{si } x \geq 0. \\ d(0, x) = -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

• Cette distance se note aussi  $|x|$  notée **valeur absolue de  $x$** .

## Quelques propriétés :

Quels que soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} |x| = |-x| . \\ |xy| = |x||y| . \\ \text{si } y \neq 0 : \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} . \end{array} \right.$$

Inégalité triangulaire :  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$|x+y| \leq |x| + |y| .$$

## Démonstration:

On a:  $|x|^2 = x^2$  car:

$$\begin{cases} \text{si } x > 0: |x| = x \\ \text{si } x < 0: |x| = -x \end{cases}$$

Donc: 
$$\begin{cases} |x|^2 = x^2 \text{ si } x > 0. \\ |x|^2 = (-x)^2 = x^2 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi: 
$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2ab. \end{aligned}$$

On a:  $ab \leq |ab| = |a||b|$ .

Donc: 
$$|a+b|^2 \leq \underbrace{|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|}_{= (|a|+|b|)^2}$$

Donc:  $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$ .

Or: la fonction racine carrée est croissante  
donc:

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

## Exercices d'application: Calculer:

$$a) |10^{-3}| = 10^{-3}$$

$\cdot 10^{-3} > 0.$

$$b) |-\sqrt{3}| = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}.$$

$\cdot -\sqrt{3} < 0$

$$c) |6 - 2\pi| = -(6 - 2\pi) = 2\pi - 6.$$

$\cdot 6 - 2\pi < 0.$

$$= 2(\pi - 3).$$

Résoudre les équations suivantes:

$$a) |x - 4| = 2,5 \quad \overset{x-4=3,5}{\curvearrowright}$$

$$b) |x + 2| = |x - 4|.$$

→ graphiquement et avec la distance (géométriquement).

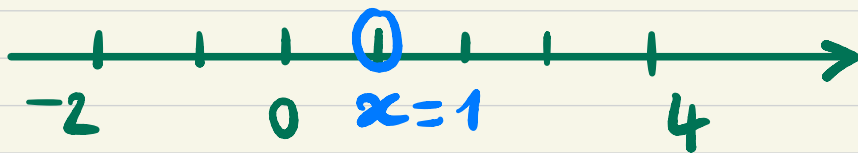
$$c) |x - 4| \leq 2,5.$$

$$d) |x + 2| > 2,5.$$

$$b) \underbrace{|x+2|}_{\substack{\text{distance} \\ \text{entre } x \text{ et} \\ -2}} = \underbrace{|x-4|}_{\substack{\text{distance} \\ \text{entre } x \text{ et} \\ 4}}$$

↳ car :

$$|x+2| = |x - (-2)|$$



Pour que soit à distance égale de -2 et 4, il faut se placer au milieu.

$$\text{Donc en } x = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

$$\text{On a alors : } \begin{cases} |x+2| = |1+2| = 3. \\ |x-4| = |1-4| = |-3| = 3. \end{cases}$$

$$a) |x-4| = 2,5.$$

$$\circ x-4 > 0: |x-4| = x-4.$$

$$\text{Donc: } x-4 = 2,5$$

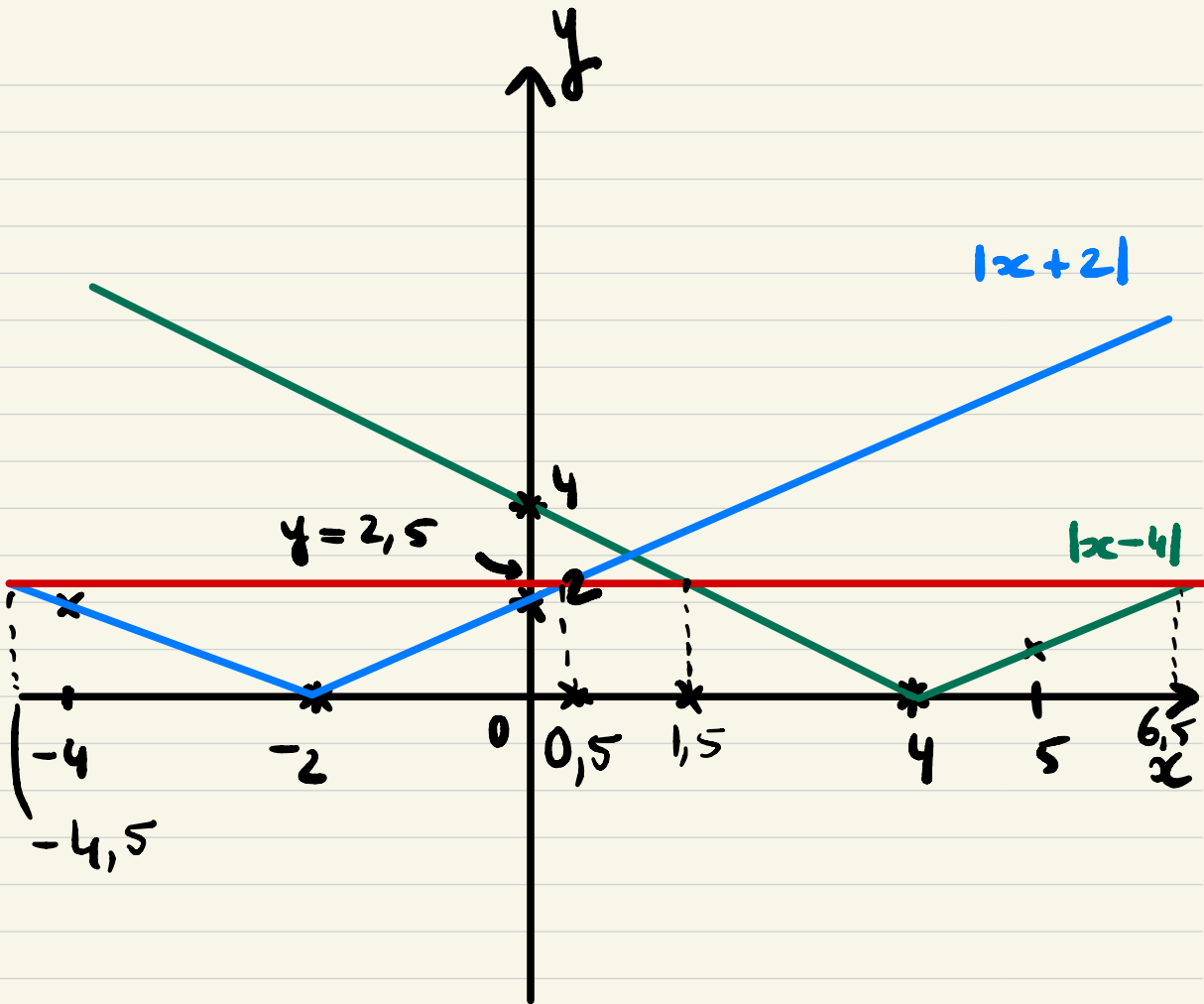
$$\Leftrightarrow x = 2,5 + 4 = 6,5.$$

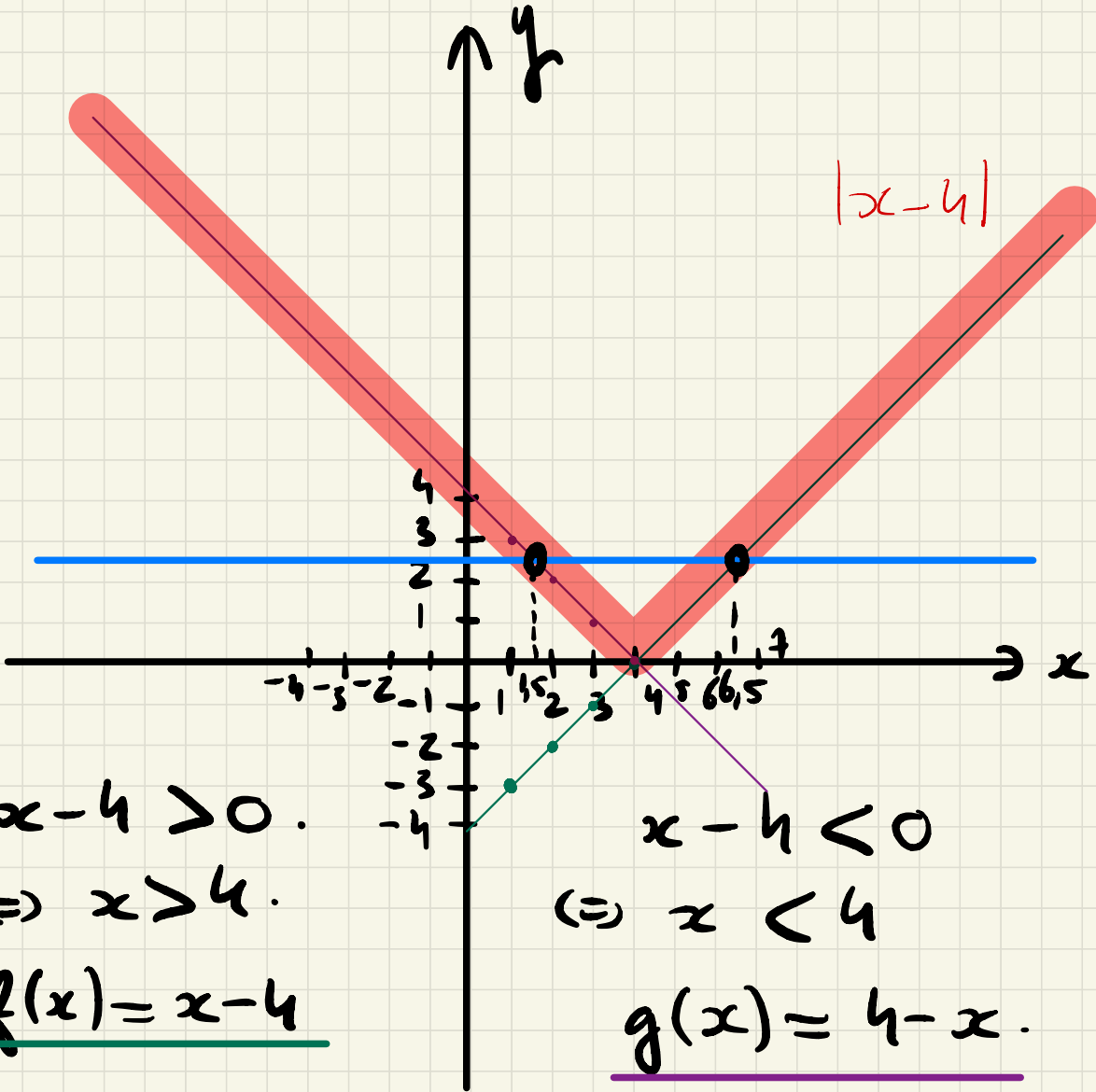
$$\circ x-4 < 0: |x-4| = 4-x$$

$$\text{Donc: } 4-x = 2,5$$

$$\Leftrightarrow -x = 2,5 - 4 = -1,5.$$

$$\Leftrightarrow x = 1,5.$$





c) Graphiquement, on résout :

$$|x-4| \leq 2,5.$$

$y = 2,5$  coupe la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto |x-4|$  en deux points pour les abscisses:  $x = 1,5$  et  $x = 6,5$ .

$$\text{Donc: } |x-4| \leq 2,5 \Leftrightarrow x \in [1,5; 6,5].$$

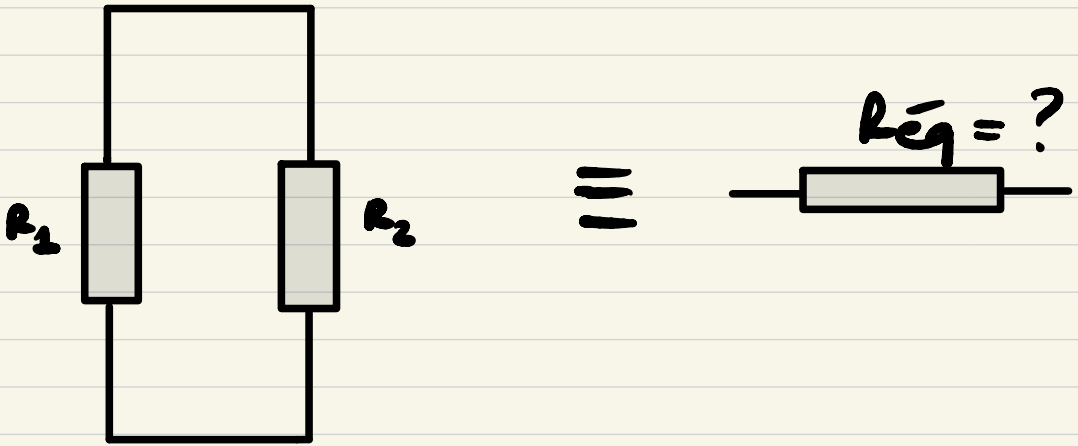
d) Idem:

$$|x+2| > 2,5 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -4,5[$$

$$\cup ]0,5; +\infty[.$$

## Exercices : Variations de fonction.

On associe deux résistances (en Ohm noté  $\Omega$ ) en parallèle pour trouver une résistance équivalente  $R_{\text{eq}}$ .



$$\text{On a : } R_{\text{eq}}^{-1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Supposons que :  $R_1 = 5 \Omega$  et

$R_2 \in [1; 5] \Omega$ . Donner les variations de  $R_{\text{eq}}$ .

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{On cherche les variations de } R_{\text{eq}}.$$

$$R_1 = 5 \, \Omega$$

$$R_2 \in [1; 5].$$

$$\frac{1}{5} = 0,2.$$

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = 0,2 + \frac{1}{R_2}.$$

$R_2$	1	→	5
$\frac{1}{R_2}$	1	→	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = 0,2 + \frac{1}{R_2}$	1,2	→	$\frac{1}{5} + 0,2 = \frac{2}{5}$
$R_{\text{eq}}$	$\frac{1}{1,2}$	→	$\frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} = 2,5$

$$R_{\bar{e}q} = \frac{1}{5} + \frac{1}{R_2} = 0,2 + \frac{1}{R_2}.$$

Variations de  $R_{\bar{e}q}$  :

$R_2$	1 $\longrightarrow$ 5
$\frac{1}{R_2}$	1 $\longrightarrow$ 0,2
$\frac{1}{R_{\bar{e}q}} = 0,2 + \frac{1}{R_2}$	1,2 $\longrightarrow$ 0,4
$R_{\bar{e}q}$	$\frac{1}{1,2}$ $\longrightarrow$ $\frac{1}{0,4}$ .

### 3. Racine carrée

Soit une fonction  $u$  définie sur un intervalle  $I$ . Alors :

- Si la fonction  $u$  est positive sur  $I$ , alors les fonctions  $u$  et  $\sqrt{u}$  ont les mêmes variations.

**Exemples :**



### 4. Inverse

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Alors :

- Si la fonction  $u$  est non nulle et si  $u$  a un signe constant sur  $I$ , alors les fonctions  $u$  et  $\frac{1}{u}$  ont des variations contraires.

**Exemples**



3. Racine carrée

définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

Soit une fonction  $u$  définie sur un intervalle  $I$ . Alors :

- Si la fonction  $u$  est positive sur  $I$ , alors les fonctions  $u$  et  $\sqrt{u}$  ont les mêmes variations.

Exemples :

$u(x) = 3x$

$3x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 0$ .

$x$	0	$+\infty$
Vari. de $u$	↗	

• Sur  $\mathbb{R}^+$

$\sqrt{u(x)} = \sqrt{3x}$ .

$x$	0	$+\infty$
Vari. de $\sqrt{u}$	$\sqrt{0} = 0$	↗

4. Inverse

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Alors :

- Si la fonction  $u$  est non nulle et si  $u$  a un signe constant sur  $I$ , alors les fonctions  $u$  et  $\frac{1}{u}$  ont des variations contraires.

sur  $\mathbb{R}^* = (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .

Exemples

$u(x) = 2x + 1$ .

$a < b$

$u(a) < u(b)$  ↘ fonction croissante

Ex:  $0 < 3$ .

$u(0) = 1$

$u(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$ .

$u(0) < u(3)$ .

$2x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{u(x)}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ .

$a < b \Rightarrow u(a) < u(b)$

↘  $\frac{1}{u(a)} > \frac{1}{u(b)}$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Vari. de $u$	↗		
Vari. de $\frac{1}{u}$	↘		

