

SUITES NUMERIQUES



Chapitre 3

Suites numériques Première

Ce cours contient TOUT ce qu'il y a à savoir sur les suites en première.

I. DEFINITION

1. Définition d'une suite

Définition

Une suite est une application mathématique qui transforme un entier naturel noté n en un unique réel noté U_n . Cette transformation peut se schématiser ainsi :

$$n \mapsto U_n \quad (U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

Vocabulaire

- n est appelé indice de la suite. Attention à toujours veiller qu'il s'agisse bien d'un entier naturel.

- U_n est le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme de la suite si $n=0$ a un sens.

La suite est notée : (U_n) . Remarquez bien l'utilisation des parenthèses pour parler de la suite. Si les parenthèses sont absentes, on parle du terme, si les parenthèses sont présentes, alors on parle de la suite.

Nous venons de voir qu'une suite opère une transformation, voyons maintenant, comment cette transformation est opérée.

2. Définition explicite d'une suite

Définition

Soit n un entier naturel. Soit (U_n) une suite. On dit que (U_n) est définie de manière explicite si et seulement si U_n dépend directement et seulement de l'indice n . Ainsi la seule donnée dont on a besoin pour calculer U_n est n .

Cela signifie qu'il existe une fonction f telle que :

$$U_n = f(n)$$

Exemple

Soit n un entier naturel. On pose $U_n = n^2 + 2n + 2$. Dès lors on a :

- $U_0 = 0^2 + 2 \times 0 + 2 = 2$
- $U_1 = 1^2 + 2 \times 1 + 2 = 5$
- $U_2 = 2^2 + 2 \times 2 + 2 = 10$

On peut sans problème calculer le 11^{ème} terme :

$$U_{10} = 10^2 + 2 \times 10 + 2 = 122$$

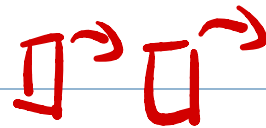
Application 1

Calculer les trois premiers termes de la suite définie par $U_n = \frac{1}{n^2+4}$ sur \mathbb{N} .

$$U_0 = \frac{1}{0^2+4} = \frac{1}{4}$$

$$U_1 = \frac{1}{1^2+4} = \frac{1}{5}$$

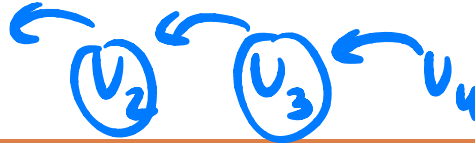
$$U_2 = \frac{1}{2^2+4} = \frac{1}{8}$$



3. Définition par récurrence d'une suite

Soit n un entier naturel. Soit (U_n) une suite. On dit que (U_n) est une suite définie par récurrence si et seulement si le terme U_{n+1} dépend du terme précédent U_n . Dans ce cas, on est obligé de préciser un terme de la suite, en général on précise le premier terme U_0 .

Cela signifie qu'il existe une fonction f telle que :

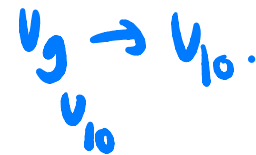


$$U_{n+1} = f(U_n)$$

Exemple :

Soit n un entier naturel. On pose $\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n \\ U_0 = 1 \end{cases}$. Dès lors, on a :

Handwritten calculations: $U_2 = U_{1+1} = 2 \times U_1 = 2 \times 2 = 4$, $U_{0+1} = U_1 = 2U_0 = 2 \times 1 = 2$, $U_1 = 2 \times U_0 = 2 \times 1 = 2$, $U_2 = 2 \times U_1 = 2 \times 2 = 4$.



Contrairement à la formule explicite, on ne peut pas calculer directement U_{10} . En effet, nous avons besoin du terme précédent, ici en l'occurrence U_9 .

Application 2

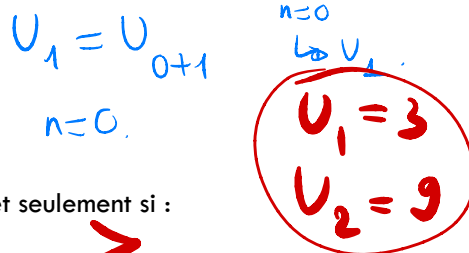
Calculer les 4 premiers termes de la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 1 \end{cases}$.

II. VARIATIONS D'UNE SUITE

Définition

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- On dit que la suite (U_n) est croissante si et seulement si :



$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \geq 0$$

- On dit que la suite (U_n) est décroissante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0.$$

Pour étudier les variations d'une suite, il existe trois méthodes à choisir judicieusement en fonction du problème que vous devez résoudre.

Méthode 1 (99% DES CAS)

Vous calculez la différence : $U_{n+1} - U_n$ pour un certain n non déterminé. S'en suit alors deux cas :

- Si $U_{n+1} - U_n \geq 0$ alors la suite est croissante
- Si $U_{n+1} - U_n \leq 0$ alors la suite est décroissante.

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \bullet U_1 &= U_0 + 2 \times 0 + 1 \\ &= 0 + 0 + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{n=0.}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_{0+1} = U_1 \\ n+1 &= 1 \\ n &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet U_2 &= U_{1+1} = U_1 + 2 \times 1 + 1 \\ &= 1 + 2 + 1 \\ &= 4. \end{aligned}$$

$$\boxed{n=1}$$

$$\begin{aligned} \bullet U_3 &= U_{2+1} = U_2 + 2 \times 2 + 1 \\ &= 4 + 4 + 1 \\ &= 9. \end{aligned}$$

$$\boxed{n=2}$$

$$\bullet U_n = n^2 + 3n$$

$$U_{n+1} - U_n \geq 0.$$

$$\begin{cases} U_{n+1} = (n+1)^2 \\ U_n = n^2 \end{cases}$$

Donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$
est croissante.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1 \geq 0 \text{ car } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$U_n = n^2 + 3n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= (n+1)^2 + 3(n+1) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3. \\ &= n^2 + 5n + 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= n^2 + 5n + 4 - (n^2 + 3n) \\ &= \cancel{n^2} + 5n + 4 - \cancel{n^2} - 3n \\ &= 2n + 4. \\ &= 2(n+2). \\ &\geq 0. \quad (\text{car } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } U_{n+1} - U_n \geq 0 \Leftrightarrow U_{n+1} \geq U_n.$$

Donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. (même strictement croissante).

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1 \rightarrow (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ croissante.}$$

$$U_{n+1} \geq U_n.$$

Application 3

$$u_{n+1} = ?$$

Démontrer que la suite définie par $U_n = n^2$ est croissante sur \mathbb{N} .

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$$

(Handwritten note: $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$ with arrows pointing to U_{n+1} and U_n)

Remarque

Si les inégalités sont strictes, cela veut dire que la suite est strictement croissante respectivement décroissante.

Méthode 2

On utilise cette méthode lorsque les deux précédentes n'ont pas fonctionné a priori. Pour un certain entier naturel n , supposons que $U_n > 0$. Alors si :

- (Handwritten note: $U_n > 0$ circled in green)*
- $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ alors (U_n) est croissante.
 - $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ alors (U_n) est décroissante.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1 \Leftrightarrow U_{n+1} \geq U_n$$

(Handwritten note: en multipliant par U_n de chaque côté.)

Remarque

La méthode 2 a pour conséquence directe la définition d'une suite croissante ou décroissante.

Application 4

Démontrer que la suite définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $U_n = 2^n$ est croissante.

$$U_{n+1} = ?$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}$$

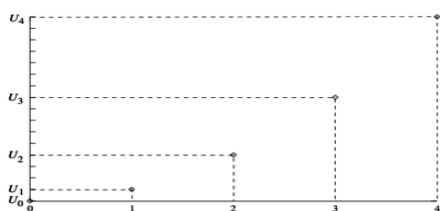
III. REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE SUITE

1. Suite définie explicitement

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = f(n)$ une suite explicite. Pour représenter la suite (U_n) graphiquement dans un repère, on construit seulement les points M_n de coordonnées $(n; U_n)$ sans les relier. On obtient ainsi un nuage de points représentant la suite.

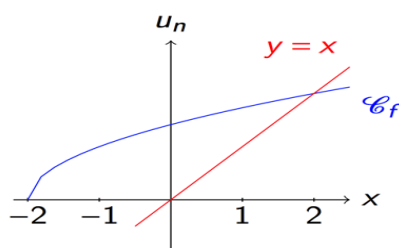
Exemple

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_n = n^2$. Alors sa représentation graphique est :



2. Suite définie par récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_{n+1} = f(U_n)$ une suite récursive. Pour tracer la représentation graphique d'une telle suite, il faut d'abord tracer la droite d'équation $y = x$ (appelée couramment la première bissectrice d'un repère) ainsi que la courbe représentative de la fonction f qui permet de passer de U_n à U_{n+1} , on obtient alors :



$$\frac{2^{3n}}{5^n} = 5^{-n}$$

$U_n = 2^n \rightarrow U_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} U_n = 2^n \\ U_{n+1} = 2^{n+1} \end{cases} \rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2^1 = 2 \geq 1$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} = 2 \geq 1$$

\rightarrow donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

$V_n = 2^{3n}$, $V_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$$V_{n+1} = 2^{3(n+1)} = 2^{3n+3}$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2^{3n+3}}{2^{3n}} = 2^{3n+3-3n} = 2^3 = 8 \geq 1$$

\rightarrow donc $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

$W_n = \frac{1}{5^n} = 5^{-n}$, $W_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

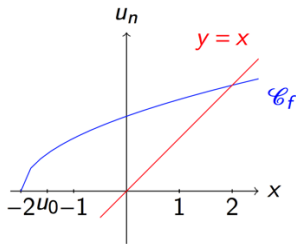
$$W_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}} = 5^{-(n+1)} = 5^{-n-1}$$

$$M1) \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{1}{5^{n+1}}}{\frac{1}{5^n}} = \frac{1}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{1} = \frac{5^n}{5^{n+1}} = \frac{5^n}{5^n \times 5}$$

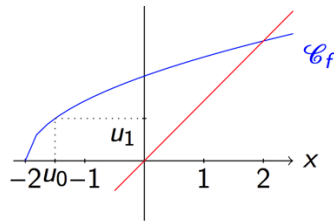
$$M2) \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{5^{-n-1}}{5^{-n}} = 5^{-n-1-(n)} = 5^{-1} = \frac{1}{5} < 1$$

donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$
est strictement décroissante.

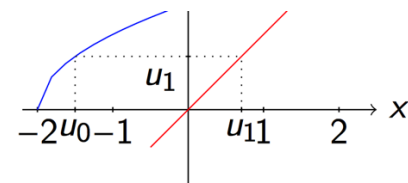
Ensuite, sur l'axe des abscisses, on place le premier terme U_0 (en général) :



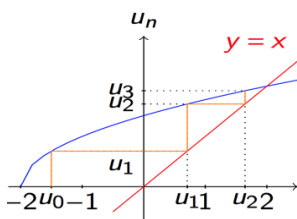
Puis grâce à la courbe représentative de la fonction f on trouve U_1 en construisant l'image de U_0 :



Là, on remarque que U_0 et U_1 ne se trouvent pas sur le même axe, on ne peut donc les comparer dans la situation actuelle. C'est la raison pour laquelle on va reporter U_1 sur l'axe des abscisses grâce à la droite d'équation $y = x$:



Pour trouver $U_2, U_3 \dots$ etc, on reproduit les mêmes opérations que nous venons d'effectuer, alors on obtient :



IV. LIMITES

Remarque

Déterminer la limite d'une suite est le fait de se poser la question suivante : de quoi se rapproche U_n lorsque n se rapproche de $+\infty$ (cela se note : $n \mapsto +\infty$). Il faut savoir que la limite d'une suite se calcule uniquement en $+\infty$, c'est-à-dire lorsque $n \mapsto +\infty$.

1. Limite égale à $+\infty$

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ si et seulement si le terme U_n se rapproche de $+\infty$ lorsque $n \mapsto +\infty$.

Exemple

Voici le tableau de valeur de la suite définie sur \mathbb{N} par $U_n = n^2$:
www.plusdebonnesnotes.com

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U_n=n^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Nous voyons bien que lorsque n augmente, U_n se rapproche de $+\infty$. Alors on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

2. Limite égale à $-\infty$

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ si et seulement si U_n se rapproche de $-\infty$ lorsque $n \mapsto +\infty$.

Exemple

Voici le tableau de valeur de la suite définie sur \mathbb{N} par $U_n = -2n + 3$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U_n=-2n+3$	3	1	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15

Nous voyons bien que lorsque n augmente, U_n se rapproche de $-\infty$. Alors on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$$

3. Limite finie

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$, où $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si le terme U_n se rapproche aussi près que l'on veut de l lorsque n devient grand.

Exemple

Voici le tableau de valeur de la suite définie sur \mathbb{N} par $U_n = \frac{2n+3}{n+4}$:

n	$U_n=(2n+3)/(n+4)$
0	0,75
1	1
2	1,166666667
3	1,285714286
4	1,375
5	1,444444444
6	1,5
...	...
100	1,951923077
200	1,975490196
300	1,983552632
400	1,987623762
1000	1,99501992

Nous voyons bien que lorsque n augmente, U_n se rapproche de 2. Alors on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$$

Application 5

Calculer U_{1000} pour vérifier le résultat du tableau.

4. Limites usuelles à connaître

Soit $n \in \mathbb{N}$, il faut connaître tous les résultats suivants (très intuitifs, inutile de faire du par cœur) qui peuvent être utilisé en contrôle ou au baccalauréat sans justification, la mention « on sait que » suffira :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- Pour tout entier naturel k non nul on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$
- Pour tout entier naturel k non nul on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

5. Convergence et divergence suite

d'une

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'une suite (U_n) est convergente si et seulement si sa limite est finie c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \in \mathbb{R}$$

On dit que le suite (U_n) diverge si et seulement si sa limite est infinie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \pm\infty \text{ ou si la limite n'existe pas}$$

V. SUITES ARITHMETIQUES

Suites \leftarrow \rightarrow géométriques.

1. Définition explicite

Soit (U_n) une suite définie sur l'ensemble des entiers naturels. On dit que (U_n) est une suite arithmétique si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + nr$$

r :
raison de la
suite.

Remarque

Si au lieu d'avoir U_0 , on a U_p où p est un entier naturel, alors : la formule devient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_p + (n - p)r$$

2. Définition par récurrence

On remarque qu'une suite est arithmétique si et seulement si ses termes successifs sont toujours séparés par la même raison r . Ceci se traduit par la formule suivante :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + r & \leftarrow \text{raison.} \\ U_0 \text{ précisé ou un autre terme} \end{cases} \quad U_{n+1} - U_n = r$$

Vocabulaire

U_0 est le premier terme de la suite

r est la raison de la suite.

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases}$$

U_0
 $U_1 \leftarrow +5$
 $U_2 \leftarrow +5$
 $U_3 \leftarrow +5$

3. Variations

Une suite (U_n) arithmétique est strictement croissante si et seulement si $r > 0$

Une suite (U_n) arithmétique est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$

Une suite (U_n) arithmétique est strictement constante si et seulement si $r = 0$ et cette constante vaut U_0

4. Limites

Soit (U_n) une suite arithmétique définie sur l'ensemble des entiers naturels

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty &\Leftrightarrow r > 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty &\Leftrightarrow r < 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = U_0 &\Leftrightarrow r = 0 \end{aligned}$$

5. Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit (U_n) une suite arithmétique. Alors il existe une formule pour calculer la somme de ses termes consécutifs.

$$\sum_{i=0}^n U_i = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

VI. SUITES GEOMETRIQUES

Pour l'ensemble de cette partie, on désigne par $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique définie sur l'ensemble des entiers naturels dont le premier terme est V_0 et la raison est q

1. Définition explicite

(V_n) est géométrique si et seulement si :

V_0 q

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 \times q^n$$

Remarque

Si au lieu d'avoir V_0 , on a V_p , alors on a :

$$V_n = V_0 \times q^n \quad V_1 \times q^{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_p \times q^{n-p}$$

2. Définition de récurrence

(V_n) est géométrique si et seulement si :

$$\begin{matrix} \cdot \downarrow \times q \cdot \\ \cdot \downarrow \times q \cdot \end{matrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{matrix} V_{n+1} = q \times V_n \\ V_0 \text{ est précisé ou un autre terme} \end{matrix} \right.$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$$

3. Variations

A savoir par cœur :

- $V_0 > 0$ et $q > 1 \Rightarrow (V_n)$ strictement croissante.
- $V_0 < 0$ et $0 < q < 1 \Rightarrow (V_n)$ strictement croissante.
- $V_0 > 0$ et $0 < q < 1 \Rightarrow (V_n)$ strictement décroissante.
- $V_0 < 0$ et $q > 1 \Rightarrow (V_n)$ strictement décroissante.
- $V_0 = 0 \Rightarrow (V_n)$ strictement constante et égale à 0.
- $q = 1 \Rightarrow (V_n)$ strictement constante et égale à V_0 .

4. Limites

A savoir par cœur

- $V_0 > 0$ et $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$
- $V_0 < 0$ et $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$
- $-1 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$
- $q < -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ n'existe pas. En d'autres termes la suite n'a pas de limite.

5. Sommes des termes d'une suite géométrique

$$q \neq 1$$

$$\sum_{i=0}^n V_i = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exemple:

$$\textcircled{n} / 1 + 1$$

Somme.

$$S = \textcircled{1} + 2 + 3 + 4 + \dots + \textcircled{n}$$
$$= \textcircled{U_1} + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + \textcircled{U_n}$$

Calculer S.

$$\begin{array}{l} +1 \downarrow U_1 = 1 \quad +1 \rightarrow U_3 = 3 \quad \dots \quad U_n = n. \\ U_2 = 2 \quad +1 \downarrow U_4 = 4 \end{array}$$

(U_n) : Suite arithmétique de raison $r=1$.

S = Somme des termes d'une suite arithmétique.

$$S = (\text{nb de termes}) \times \frac{(\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

$$= n \times \frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$U_n \quad U_1$$

nb de termes: $n-1+1$.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$+ S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + n+1$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + n$$

↳ Somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2.

$$S = \text{nb det.} \times \frac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}$$