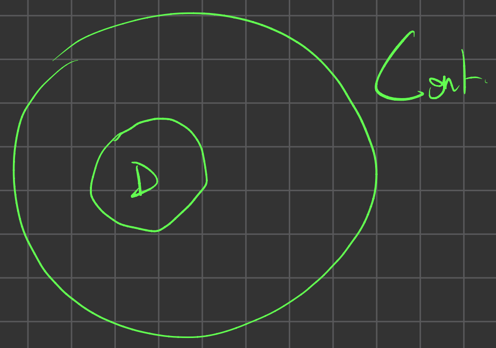
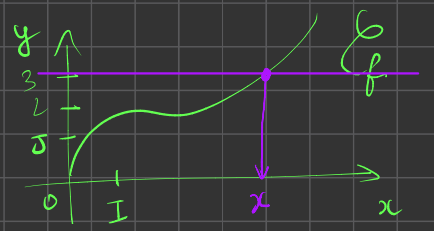
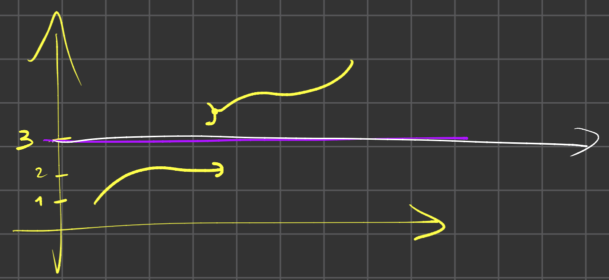


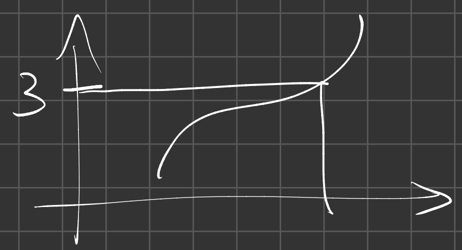
$F \Rightarrow C$

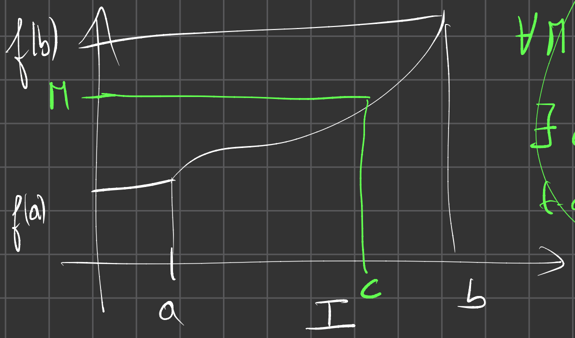


$f(x)=3$



$f(x)=3$.





$\forall M \in [f(a);f(b)]$

$\exists c \in [a;b]$

tq $f(c) = M$

$x^3 + 2x^2 = 2$

$f(x) = 2$

$f'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x+4)$

$3x+4 > 0$

$3x > -4$

$x > -\frac{4}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1{,}2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3 **corrigé disponible**

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3+2x^2-10x+11}{2(x-1)^2}$

On admet que le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	-4	-1	1		2.7		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		‖	$\searrow$	$6{,}5$	$\nearrow$	

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-4\,;-1\,[$.

b. Donner une valeur approchées de α à 10^{-2} près

c. Combien l'équation $f(x) = 10$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$? Justifier.

1) f est continue sur $]-4;-1[$.

2) f est strictement croissante sur $]-4;-1[$

3) $f(-4) = \dfrac{2\times(-4)^3 + 2\times(-4)^2 - 10\times(-4) + 11}{2\times(-4-1)^2} = \dfrac{-9}{10} < 0$

4) $f(-1) = \dfrac{2\times(-1)^3 + 2\times(-1)^2 - 10\times(-1) + 11}{2\times(-1-1)^2} = \dfrac{21}{8} > 0$

5) $0 \in \left[\dfrac{-9}{10}\,;\,\dfrac{21}{8}\right]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'éq° $f(x) = 0$ admet une unique sol° dans $]-4;-1[$.

3) Calculatrice nous donne : $\alpha \simeq -3{,}15$

plus de bonnes notes

Exercice 6 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

1. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier alors que $f(x) = 2$ admet trois solutions sur $[-4\,;4]$.

f est dér sur R :

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

$f'(x) = 0$

$3x(x+2) = 0$.

$3x = 0$ ou $x+2 = 0$,

$x = 0$ $x = -2$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x) = x(x+2)$		$+$		$-$		$+$	
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Continuité – Fiche de cours

1. Notion de continuité

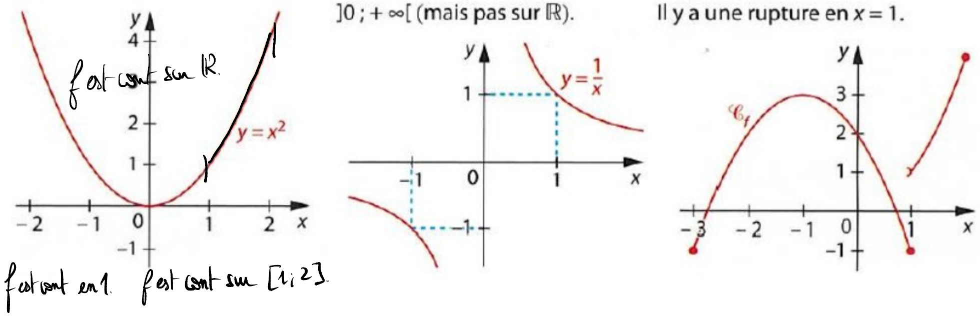
a. Définition

Une fonction définie sur un intervalle I est continue si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille)

• La fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$.

• La fonction inverse est continue sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ (mais pas sur $\mathbb{R}$).

• f est définie mais pas continue sur $[-3 ; 2]$.
Il y a une rupture en $x = 1$.



b. Théorème de continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I :

- f est continue en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$x<a$
$x>a$

c. Propriétés

- Les fonctions usuelles (affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue, exponentielles,) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I ; la réciproque est fausse

Dér $\Rightarrow$ Cont.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

On souhaite résoudre l'équation $f(x) = k$

Soit f une **fonction continue et strictement monotone** sur un **intervalle** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$.

<u>Cas de f croissante</u> :

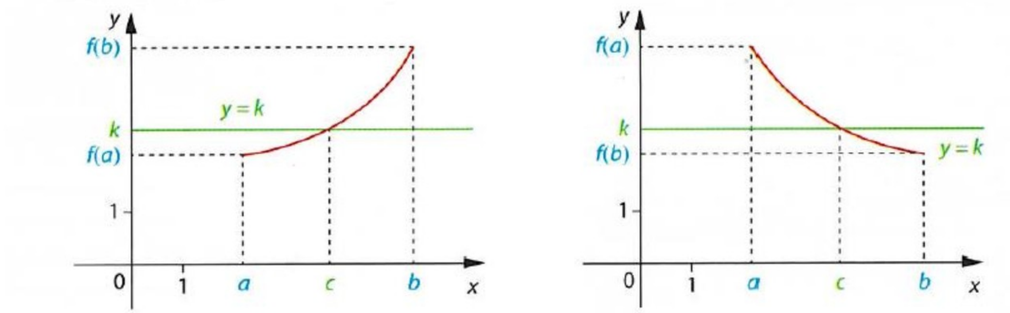
Si $k \in [f(a) ; f(b)]$ alors il existe un unique $\alpha \in [a ; b]$ tel que $f(\alpha) = k$

<u>Cas de f décroissante</u> :

Si $k \in [f(b) ; f(a)]$ alors il existe un unique $\alpha \in [a ; b]$ tel que $f(\alpha) = k$

• Cas où f est strictement croissante

• Cas où f est strictement décroissante



3. Application aux suites

a. Application de la continuité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers $L \in I$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(L)$$

b. Théorème du point fixe

Soit f une fonction définie et continue sur I à valeurs dans I :

pour $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = L$ alors $L = f(L)$ et $L \in I$

Continuité – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

On considère la fonction f définie sur [3 ; + ∞ [par :

$f(x) =$ E(x) pour $x \in [3\ ;4[$

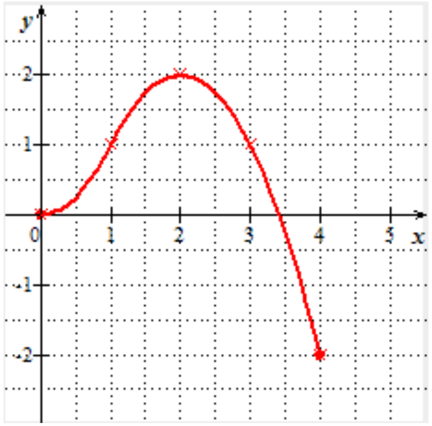
$f(x) = -\ x + 4$ pour $x \in [\ 4\ ;+\infty\ [$

a. Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormal du plan.

b. Cette fonction est-elle continue sur [3 ; + ∞ [? Pourquoi ?

Exercice 2 **corrigé disponible**

La fonction donnée ci dessous représente une fonction définie sur [0 ;4].



1. a. Donner le tableau de variation de f.

b. La fonction f est-elle continue sur [0 ; 4] ?

2.a. Sur l'intervalle [2 ; 4], pour résoudre l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$, quel théorème peut-on appliquer et pourquoi ?

b. En appliquant ce théorème à l'intervalle [2 ; 4], montrer que l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$ admet une unique solution α.

c. Donner une valeur approchée de α.

Exercice 3 **corrigé disponible**

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ;1\ [\ \cup\ ]\ 1\ ;+\infty\ [$ par : $f(x)=\dfrac{2x^3+2x^2-10x+11}{2(x-1)^2}$

On admet que le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		1		2.7		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↘	6,5	↗	

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-4\ ;-1\ [$.

b. Donner une valeur approchées de α à 10^{-2} près

c. Combien l'équation $f(x) = 10$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $]\ 1\ ;+\infty\ [$? Justifier.

Exercice 4 **corrigé disponible**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 4 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Montrer que f est continue en 1.

2) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier

Exercice 5 **corrigé disponible**

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{3x}+1 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{2+x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

1. f est-elle continue en 0 ? Justifier.

2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 6 **corrigé disponible**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

1. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier alors que $f(x) = 2$ admet trois solutions sur $[-4\,;\,4]$.

Exercice 7 **corrigé disponible**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Vérifier que si $x \in [0\,;\,6]$, alors $f(x) \in [0\,;\,6]$.

3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0\,;\,6]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 8 **corrigé disponible**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Vérifier que si $x \in [2\,;\,5]$, alors $f(x) \in [2\,;\,5]$.

3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [2\,;\,5]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 9 **corrigé disponible**

Trouver la valeur de k telle que la fonction définie par $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + e^{x-1} \text{ si } x \leqslant 1 \\ x + k \text{ si } x > 1 \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 **corrigé disponible**

Soit f la fonction définie sur $[-6\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{6+x}.$$

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que (u_n) est une suite croissante, majorée par 3.

2. Que peut-on dire de la convergence de la suite ?

3. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 11 corrigé disponible

1) Soit le polynome P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

a) Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ du polynome P

b) Déterminer les variations de P sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-1, 0]$.

d) Donner un encadrement de α à 10^{-5}

e) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x

Exercice 12 corrigé disponible

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et dresser son tableau de variations.
2. Soit (E) l'équation $x^3 - 3x^2 = 5$

   Montrer que (E) admet une solution α unique sur $\mathbb{R}$ et déterminer une valaur approchée par défaut de α à 10^{-3}.

3. Démontrer que $\alpha = \sqrt{\dfrac{5}{\alpha - 3}}$

Exercice 13 corrigé disponible

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{-2x^2 + 3x + 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = a & (a \in \mathbb{R}) \end{cases}$

Quelle valeur doit-on donner à a pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 14 corrigé disponible

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ m & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Quelle valeur doit-on donner à m pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 15 corrigé disponible

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{-2x^2 + 5x - 3} & \text{si } x < 1 \\ f(1) = 4 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 1