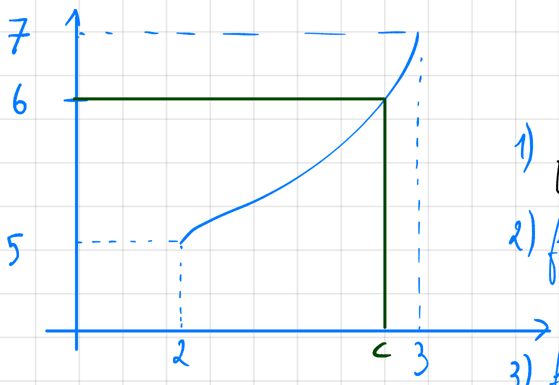
Dimanche 5 novembre 2023. Spé maths. - Continuité.



$f(x) = 6.$

1) f est dér donc continue

2) f est strictement croissante sur $[2;3]$.

3) $f(2) = 5 < 6$

4) $f(3) = 7 > 6$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution sur $[2;3]$.

Exercice 4 corrigé disponible

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 4 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Montrer que f est continue en 1.

2) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier

f est cont en a ssi :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a).$$

Exercice 4 corrigé disponible

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 4 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Montrer que f est continue en 1.

2) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 1^2 - 1 - 4 = -4$ $\qquad f(1) = 1^2 - 1 - 4 = -4$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \dfrac{1-5}{1} = \dfrac{-4}{1} = -4$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1) = -4.$

$\boxed{f \text{ est continue en } 1.}$

Rappel : ($1^{ère}$) On dit que f est dérivable en a SSi :

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l \in \mathbb{R}.$

$h > 0$
$h < 0$

2) Soit $x \leq 1$. $f(x) = x^2 - x - 4.$

$f'(1)$?

f est dér sur $]-\infty; 1]$

$f'(x) = 2x - 1.$

$f'(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$

$\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$\dfrac{(1+h)^2 - (1+h) - 4 + 4}{h}$

$= \dfrac{\cancel{1} + 2h + h^2 - \cancel{1} - h}{h}$

$= \dfrac{h + h^2}{h}$

$= \dfrac{\cancel{h}(1+h)}{\cancel{h}}$

$= 1 + h.$

$\lim\limits_{h \to 0} 1 + h = 1.$

Soit $x > 1$ $f(x) = \dfrac{x-5}{x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

$u(x) = x - 5$ $\qquad v(x) = x$

$u'(x) = 1$ $\qquad v'(x) = 1.$

$f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v^2(x)} = \dfrac{1 \times x - 1 \times (x-5)}{x^2}$

$= \dfrac{x - x + 5}{x^2}$

$$= \frac{5}{x^2}.$$

$$\lim_{x \to 1} f'(x) = \frac{5}{1^2} = 5.$$

Donc f n'est pas dérivable en 1.

Exercice n°10 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$: $(P_n) : u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

<u>Initialisation</u> : Vérifions si $u_0 \leq u_1 \leq 3$

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = \sqrt{6+u_0} = \sqrt{6} > 0. \\ \sqrt{6} < 3. \end{array}\right\} P_0 \text{ est vraie.}$$

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

On veut prouver que $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 3.$$

$$u_n + 6 \leq u_{n+1} + 6 \leq 9.$$

On applique la fonction racine carrée croissante sur $[0; +\infty[$.

$$\sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{u_{n+1} + 6} \leq 3.$$

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3.$$

$$P_n \Rightarrow P_{n+1}.$$

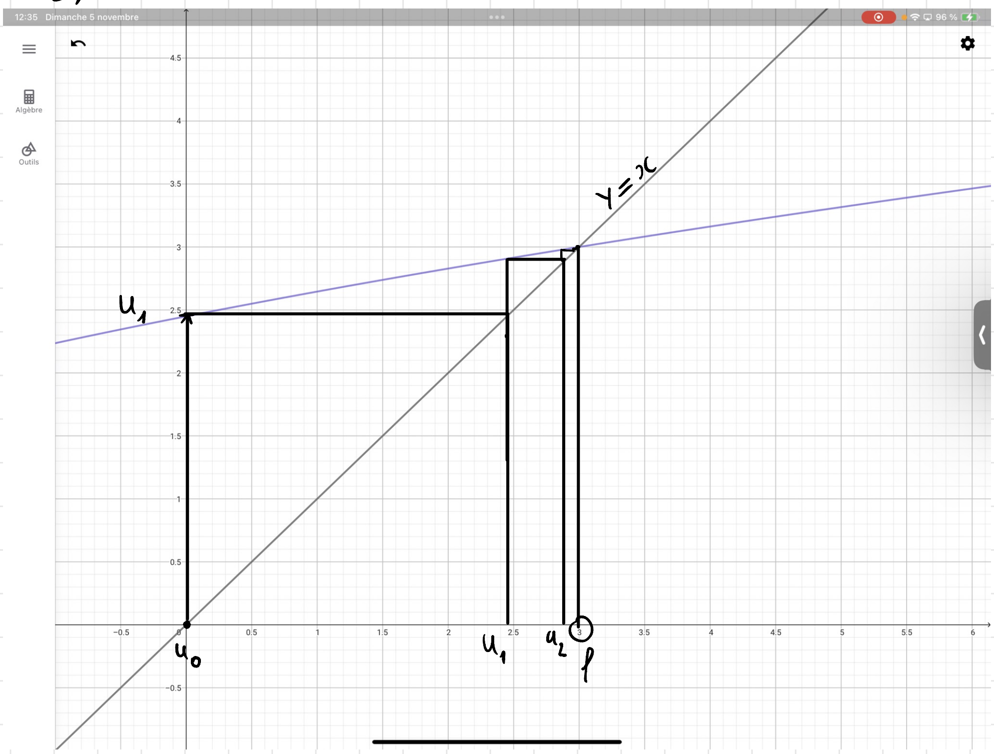
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

(U_n) est croissante et majorée par 3.

2) Toute suite croissante et majorée est convergente.

Donc (U_n) converge vers une limite $l \leq 3$.

3)



$$f(x) = \sqrt{6+x}$$

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

$$f(\ell) = \ell.$$

$$u_1 = f(u_0).$$

$$\sqrt{6+\ell} = \ell.$$

$$u_2 = f(u_1)$$

$$-3 = 3$$

$$a^2 = b^2 \qquad (-3)^2 = (3)^2 \qquad \sqrt{6+\ell}^{\,2} = \ell^2$$

$$a = b \qquad a = b.$$

$$a^2 = b^2$$

$$6 + \ell = \ell^2$$

$$0 = \ell^2 - \ell - 6$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6).$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0.$$

$$\ell_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -2 < 0 \text{ impossible.}$$

$$\ell_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = \boxed{3}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 3.}$$

Exercice 12.