Exercice 12 corrigé disponible

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et dresser son tableau de variations.
2. Soit (E) l'équation $x^3 - 3x^2 = 5$

   Montrer que (E) admet une solution α unique sur $\mathbb{R}$ et déterminer une valaur approchée par défaut de α à 10^{-3}.
3. Démontrer que $\alpha = \sqrt{\dfrac{5}{\alpha - 3}}$

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 = x^3\left(1 - \dfrac{3x^2}{x^3}\right)$

$$= x^3\left(1 - \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2} \times x}\right)$$

$$= x^3\left(1 - \frac{3}{x}\right)$$

En $+\infty$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{3}{x} = 1$

Par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

En $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{3}{x} = 1$

Par produit de limites $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

Tableau de variation:

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme de degré 3:

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

Or $f'(x) = 0 \iff 3x(x-2) = 0$.

$\iff 3x = 0$ ou $x - 2 = 0$

$x = 0$ ou $x = 2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 = 0$

$f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 = -4$.

2) Sur $]-\infty; 2]$, $f(x) \leq 0$, donc l'éq° $f(x) = 5$ n'admet aucune solution sur $]-\infty; 2]$

En revanche, sur $[2;+\infty[$,

* f est continue.
* f est strictement croissante.
* $f(2) = -4 < 5$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ " >5 "

$5 \in [-4;+\infty[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'éq° $f(x)=5$ admet une unique solution sur $[2;+\infty[$.

Enfin, $f(x)=5$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$

La calculatrice nous indique $\alpha \simeq 3{,}426$.

3) Démontrons que $\alpha = \sqrt{\dfrac{5}{\alpha-3}}$.

$$f(\alpha) = 5$$
$$\alpha^3 - 3\alpha^2 = 5.$$
$$\alpha^2(\alpha-3) = 5.$$
$$\alpha^2 = \frac{5}{\alpha-3}$$

$\alpha > 0$ donc

$$\alpha = \sqrt{\frac{5}{\alpha-3}}.$$

A, B, C et D sont coplanaires ssi :

$\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2$ t.q.

$$\vec{AB} = a \times \vec{AC} + b \times \vec{AD}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 = -6a - 8 \times b. \\ 1 = 2a + b. \\ 0 = 4a + 4b. \end{cases}$$

Continuité – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

On considère la fonction f définie sur [3 ; + ∞ [par :

$f(x) =$ E(x) pour $x \in [3 ; 4[$

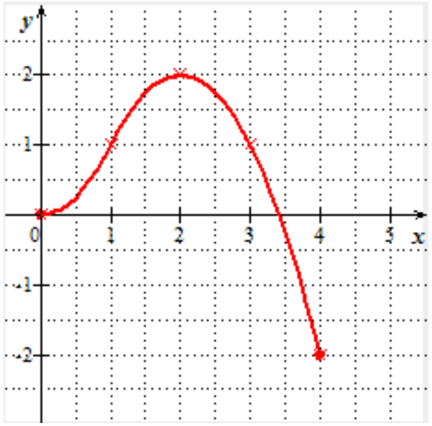
$f(x) = - x + 4$ pour $x \in [4 ; + \infty [$

a. Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormal du plan.

b. Cette fonction est-elle continue sur [3 ; + ∞ [? Pourquoi ?

Exercice 2 **corrigé disponible**

La fonction donnée ci dessous représente une fonction définie sur [0 ;4].



1. a. Donner le tableau de variation de f.

b. La fonction f est-elle continue sur [0 ; 4] ?

2.a. Sur l'intervalle [2 ; 4], pour résoudre l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$, quel théorème peut-on appliquer et pourquoi ?

b. En appliquant ce théorème à l'intervalle [2 ; 4], montrer que l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$ admet une unique solution α.

c. Donner une valeur approchée de α.

Exercice 3 **corrigé disponible**

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 1 [\cup] 1 ; +\infty [$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x^2 - 10x + 11}{2(x-1)^2}$

On admet que le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		1		2.7		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↘	6,5	↗	

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-4 ; -1[$.

b. Donner une valeur approchées de α à 10^{-2} près

c. Combien l'équation $f(x) = 10$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $]1 ; +\infty[$? Justifier.

Exercice 4 **corrigé disponible**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 4 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Montrer que f est continue en 1.

2) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier

Exercice 5 **corrigé disponible**

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{3x}+1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{2+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. f est-elle continue en 0 ? Justifier.

2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 6 **corrigé disponible**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

1. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier alors que $f(x) = 2$ admet trois solutions sur $[-4 ; 4]$.

Exercice 7 **corrigé disponible**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Vérifier que si $x \in [0 ; 6]$, alors $f(x) \in [0 ; 6]$.

3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0 ; 6]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 8 **corrigé disponible**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Vérifier que si $x \in [2 ; 5]$, alors $f(x) \in [2 ; 5]$.

3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [2 ; 5]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 9 **corrigé disponible**

Trouver la valeur de k telle que la fonction définie par $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + e^{x-1} & \text{si } x \leqslant 1 \\ x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 **corrigé disponible**

Soit f la fonction définie sur $[-6 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{6+x}.$$

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que (u_n) est une suite croissante, majorée par 3.

2. Que peut-on dire de la convergence de la suite ?

3. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 11 corrigé disponible

1) Soit le polynome P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

a) Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ du polynome P

b) Déterminer les variations de P sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-1, 0]$.

d) Donner un encadrement de α à 10^{-5}

e) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x

Exercice 12 corrigé disponible

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et dresser son tableau de variations.

2. Soit (E) l'équation $x^3 - 3x^2 = 5$

   Montrer que (E) admet une solution α unique sur $\mathbb{R}$ et déterminer une va
   par défaut de α à 10^{-3}.

3. Démontrer que $\alpha = \sqrt{\dfrac{5}{\alpha - 3}}$

Exercice 13 corrigé disponible

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{-2x^2 + 3x + 2} \\ f(2) = a \quad (a \in \end{cases}$

Quelle valeur doit-on donner à a pour que la fonctior continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 14 corrigé disponible

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

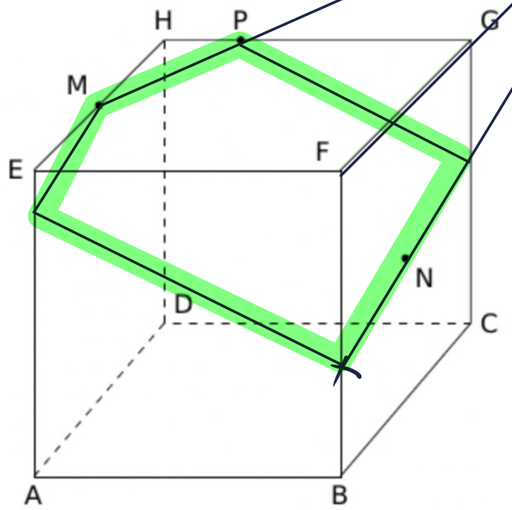
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ m & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Quelle valeur doit-on donner à m pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 15 corrigé disponible

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{-2x^2 + 5x - 3} & \text{si } x < 1 \\ f(1) = 4 \end{cases}$

FGH donné ci-dessous :



t [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

be par le plan (MNP)

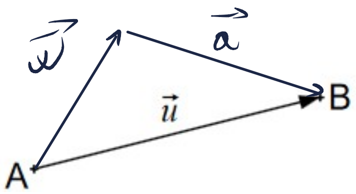
Vecteurs, droites et plans dans l'espace – Fiche de cours

I. Vecteurs dans l'espace

a. Définition

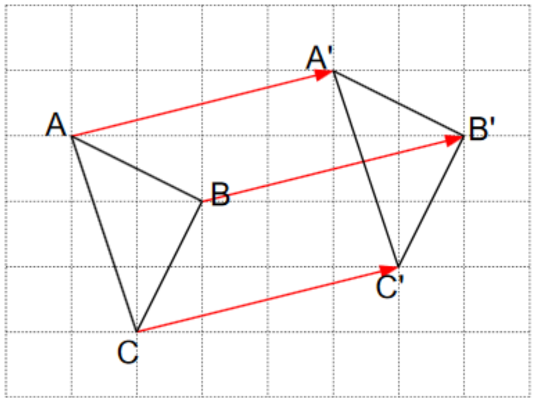
Un vecteur est un objet géométrique défini par :

- Une direction
- Un sens
- Une norme



b. Notion de translation

Une translation est une transformation du plan qui réalise le glissement de tous les points du plan selon un même déplacement



Ce déplacement peut être caractérisé par un vecteur :

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$$

c. Vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et λ un réel non nul

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\vec{v}=\lambda\vec{u}$

d. Vecteurs coplanaires

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et λ, μ deux réels non nuls

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi $\vec{w}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$

e. Vecteurs linéairement indépendants et bases

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et a,b ,c trois réels

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants alors :

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow a=b=c=0$$

3 vecteurs linéaires indépendants forment une base de l'espace

II. Droites dans l'espace

a. Définition d'une droite dans l'espace

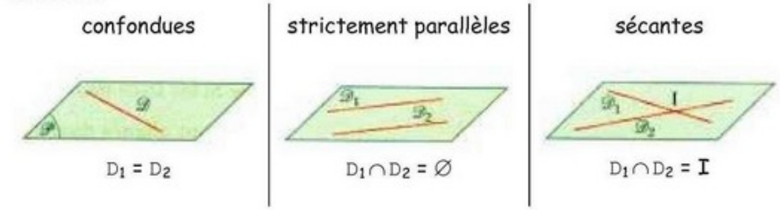
Une droite peut être définie :

- avec 2 points
- avec un point et un vecteur

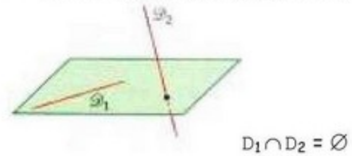
b. Position relatives de droites dans l'espace

- Les droites (D_1) et (D_2) peuvent être coplanaires :

Elles sont :



- Les droites (D_1) et (D_2) peuvent être non coplanaires



III. Plans dans l'espace

a. Définition d'un plan dans l'espace

Un plan peut être défini :

1. Avec 3 points

   Un plan de l'espace peut être défini avec 3 points non alignés

   Exemple : Soient A, B et C 3 points de l'espace, on définit le plan

   (P) = (ABC)

2. Avec une droite et un point

   Un plan de l'espace peut être défini avec une droite et un point n'appartenant pas à cette droite

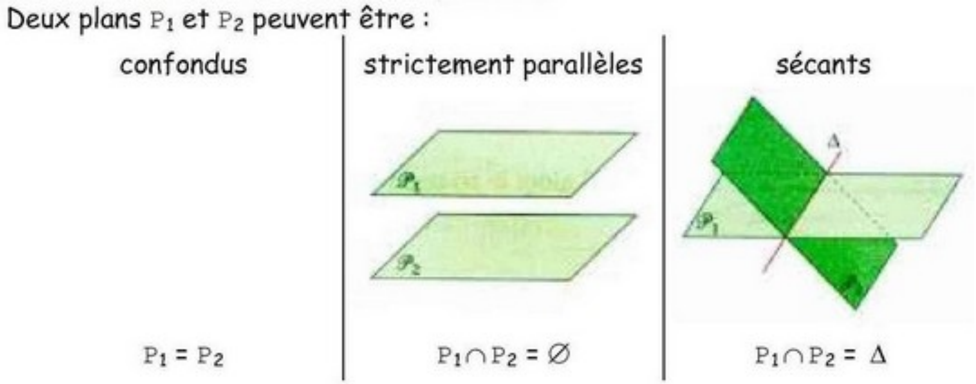
3. Avec 2 droites sécantes

   Un plan de l'espace peut être défini avec deux droites sécantes

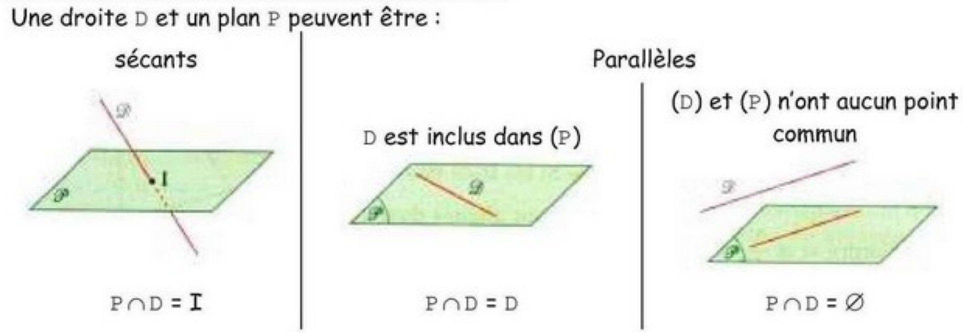
4. Vocabulaire

   Dire que des droites ou des points sont coplanaires signifie qu'ils appartiennent au même plan

b. Position relatives de plans dans l'espace



c. Position relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace

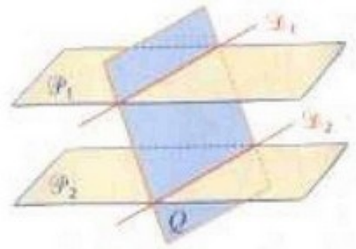


IV. Parallélisme dans l'espace

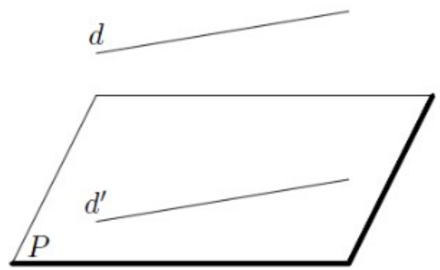
1. Parallélisme de deux droites

   Si $P_1//P_2$ avec $P_1 \cap Q = (d_1)$ et $P_2 \cap Q = (d_2)$

   Alors $(d_1)//(d_2)$



2. Parallélisme d'une droite et d'un plan



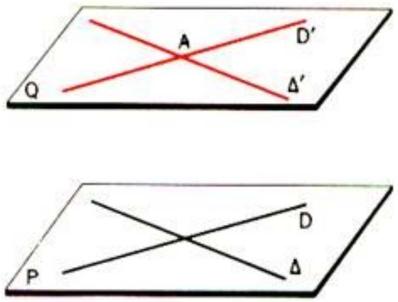
Si (d) // (d') avec (d') $\subset$ P $\Rightarrow$ (d)//P

3. Parallélisme de deux plans

Si (D) $\cap \Delta \neq \varnothing$ avec (D) $\subset$P et $\Delta \subset$P

Si (D)//(D′) et $\Delta // \Delta'$

Alors P et P′ sont parallèles

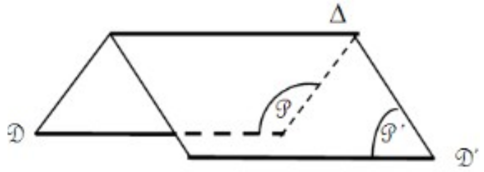


4. Théorème du toit

Soit P et P′ deux plans tels que P $\cap$P′=Δ

De plus (d) $\subset$P ; (d′) $\subset$ P′ ; (d)//(d′)

Alors (d)//(d′)//Δ d'après le théorème du toit



V. Repères dans l'espace

a. Coordonnées d'un vecteur de l'espace

Soients $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points de l'espace

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

b. Coordonnées du milieu d'un segment

Soients $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points de l'espace et I le milieu du segment [AB]

$$I\left(\frac{x_B + x_A}{2} ; \frac{y_B + y_A}{2} ; \frac{z_B + z_A}{2}\right)$$

c. Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

On définit une droite (d) de l'espace avec un vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}} ; y_{\vec{u}} ; z_{\vec{u}})$ et un point $A(x_A ; y_A ; z_A) \in (d)$

La représentation paramétrique de la droite (d) est :

$$(d) : \begin{cases} x = t \cdot x_{\vec{u}} + x_A \\ y = t \cdot y_{\vec{u}} + y_A \\ z = t \cdot z_{\vec{u}} + z_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

d. Barycentre dans l'espace

Soit G le barycentre de n points pondérés (A_1 , a_1) (A_2 , a_2) … (A_n , a_n) avec $A_1(x_1 ; y_1 ; z_1)$ $A_2(x_2 ; y_2 ; z_2)$ $A_n(x_n ; y_n ; z_n)$

$$a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \ldots a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

$$G\begin{pmatrix} x_G = \dfrac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n}{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \\ y_G = \dfrac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots a_n y_n}{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \\ z_G = \dfrac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots a_n z_n}{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \end{pmatrix}$$