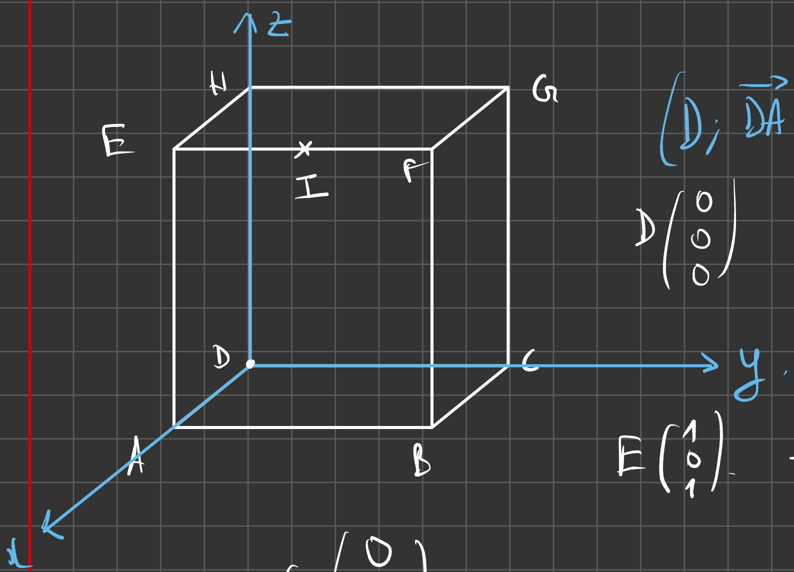
$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

A, B, C sont alignés.



$(D; \vec{DA}; \vec{DC}; \vec{DH})$

$D\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$E\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. $I\begin{pmatrix}1\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$.

$G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

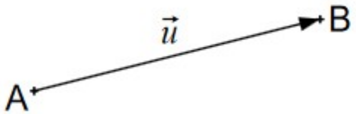
Vecteurs, droites et plans dans l'espace – Fiche de cours

I. Vecteurs dans l'espace

a. Définition

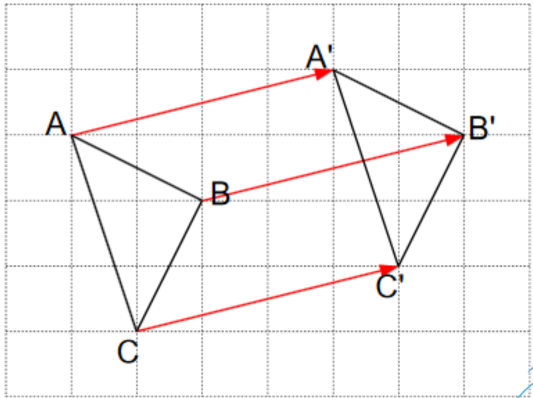
Un vecteur est un objet géométrique défini par :

- Une direction
- Un sens
- Une norme



b. Notion de translation

Une translation est une transformation du plan qui réalise le glissement de tous les points du plan selon un même déplacement



$4\vec{u}\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}$

Ce déplacement peut être caractérisé par un vecteur : $\vec{\mu}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$$

$\vec{\mu}+\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

c. Vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et λ un réel non nul

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\vec{v}=\lambda\vec{u}$

$\vec{\mu}=k\vec{v}$

$\vec{\mu}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$\vec{v}$

$\vec{\mu}$

$xy'-x'y=0$

A,B,C $\overrightarrow{AB}=k\times\overrightarrow{AC}$

d. Vecteurs coplanaires

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et λ, μ deux réels non nuls

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi $\vec{w}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$

e. Vecteurs linéairement indépendants et bases

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et a,b ,c trois réels

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants alors :

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow a=b=c=0$$

3 vecteurs linéaires indépendants forment une base de l'espace

II. Droites dans l'espace

a. Définition d'une droite dans l'espace

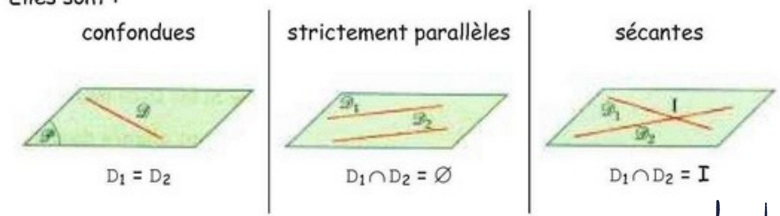
Une droite peut être définie :

- avec 2 points
- avec un point et un vecteur

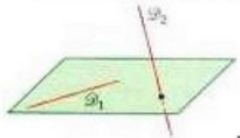
b. Position relatives de droites dans l'espace

- Les droites (D_1) et (D_2) peuvent être coplanaires :

Elles sont :



- Les droites (D_1) et (D_2) peuvent être non coplanaires



$D_1 \cap D_2 = \varnothing$

2 droites

Coplanaires

Non coplanaires

Sécantes

//

III. Plans dans l'espace

a. Définition d'un plan dans l'espace

Un plan peut être défini :

1. Avec 3 points

   Un plan de l'espace peut être défini avec 3 points non alignés

   Exemple : Soient A, B et C 3 points de l'espace, on définit le plan

   (P) = (ABC)

2. Avec une droite et un point

   Un plan de l'espace peut être défini avec une droite et un point n'appartenant pas à cette droite

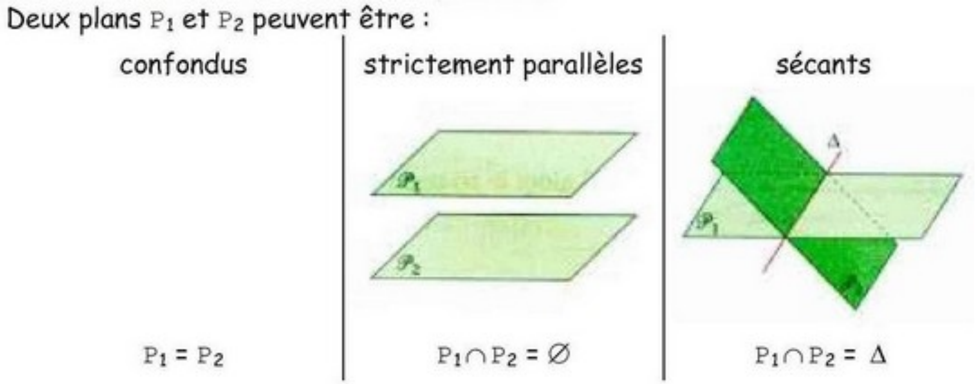
3. Avec 2 droites sécantes

   Un plan de l'espace peut être défini avec deux droites sécantes

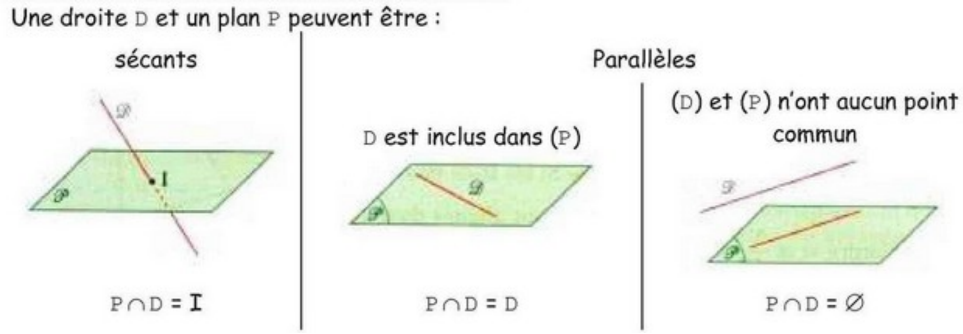
4. Vocabulaire

   Dire que des droites ou des points sont coplanaires signifie qu'ils appartiennent au même plan

b. Position relatives de plans dans l'espace



c. Position relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace

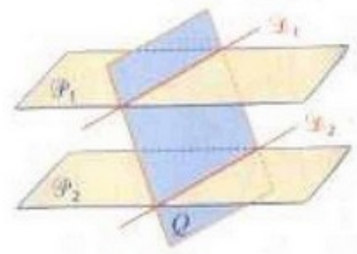


IV. Parallélisme dans l'espace

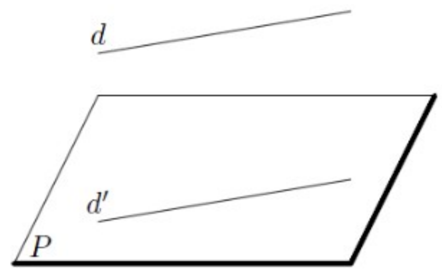
1. Parallélisme de deux droites

   Si $P_1//P_2$ avec $P_1 \cap Q = (d_1)$ et $P_2 \cap Q = (d_2)$

   Alors $(d_1)//(d_2)$



2. Parallélisme d'une droite et d'un plan



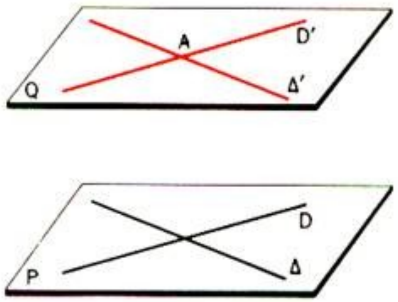
Si (d) // (d') avec $(d') \subset P$ $\Rightarrow$ (d)//P

3. Parallélisme de deux plans

Si (D) $\cap \Delta \neq \varnothing$ avec (D) $\subset$P et $\Delta \subset$P

Si (D)//(D′) et Δ//Δ'

Alors P et P′ sont parallèles

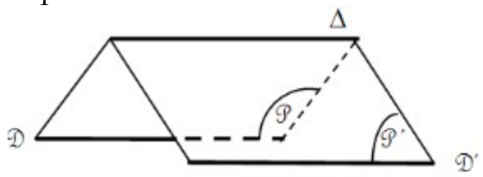


4. Théorème du toit

Soit P et P′ deux plans tels que P $\cap$P′=Δ

De plus (d) $\subset$P ; (d′) $\subset$ P′ ; (d)//(d′)

Alors (d)//(d′)//Δ d'après le théorème du toit



V. Repères dans l'espace

a. Coordonnées d'un vecteur de l'espace

Soient $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points de l'espace

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

b. Coordonnées du milieu d'un segment

Soient $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points de l'espace et I le milieu du segment [AB]

$$I\left(\frac{x_B + x_A}{2} ; \frac{y_B + y_A}{2} ; \frac{z_B + z_A}{2}\right)$$

c. Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

On définit une droite (d) de l'espace avec un vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}} ; y_{\vec{u}} ; z_{\vec{u}})$ et un point $A(x_A ; y_A ; z_A) \in (d)$

La représentation paramétrique de la droite (d) est :

$$(d) : \begin{cases} x = t \cdot x_{\vec{u}} + x_A \\ y = t \cdot y_{\vec{u}} + y_A \\ z = t \cdot z_{\vec{u}} + z_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

d. Barycentre dans l'espace

Soit G le barycentre de n points pondérés (A_1, a_1) (A_2, a_2) … (A_n, a_n) avec $A_1(x_1 ; y_1 ; z_1)$ $A_2(x_2 ; y_2 ; z_2)$ $A_n(x_n ; y_n ; z_n)$

$$a_1 \vec{GA_1} + a_2 \vec{GA_2} + \ldots a_n \vec{GA_n} = \vec{0}$$

$$G\begin{pmatrix} x_G = \dfrac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n}{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \\ y_G = \dfrac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots a_n y_n}{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \\ z_G = \dfrac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots a_n z_n}{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \end{pmatrix}$$