plus de bonnes notes

Exercice 34

Antille Guyane 2011 extrait

On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

1) Démontrer que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.

2) Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1

$3^2 \equiv 9\,[5]$

$3^2 \equiv 4\,[5]$

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	3	2

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ? Les réponses sont dans le tableau.

3) En déduire que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

$11x^2 - 7y^2 = 5$

$\Rightarrow$

$x^2 \equiv 2y^2\,[5]$

Rappel

$a \equiv b\,[c] \iff c/(a-b)$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q $a - b = c \times k$.

Soit $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de F :

$11x^2 - 7y^2 = 5$.

$x^2 + 10x^2 - 2y^2 - 5y^2 = 5$.

$x^2 - 2y^2 = 5 - 10x^2 + 5y^2$.

$x^2 - 2y^2 = 5(1 - 2x^2 + y^2)$ où $1 - 2x^2 + y^2 \in \mathbb{Z}$ car $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$

$5 / (x^2 - 2y^2)$.

$$\boxed{x^2 \equiv 2y^2\,[5]}$$

3. Nous voyons que $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ sol° de F

$\Rightarrow x^2 \equiv 2y^2\,[5]$.

x^2 et $2y^2$ ont le même reste dans la division euclidienne par 5.

Or x^2 et $2y^2$ ont le même reste par 5 ssi

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 0\,[5] \\ \text{et } y \equiv 0\,[5] \end{array}\right\} \iff x \text{ et } y \text{ sont multiples de } 5.$$

Démontrez qu'un nombre $n \in \mathbb{N}$ est multiple de 3 ssi la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

$n = 592 = 5 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0$.

$10 \equiv 1\,[3]$

$10^n \equiv 1\,[3]$.

$n = a_n \times 10^n + a_{n-1}\,10^{n-1} + \dots + a_0\,10^0$.

$10^n \equiv 1\,[3]$.

$a_n 10^n \equiv a_n\,[3]$

$a_{n-1}\,10^{n-1} \equiv a_{n-1}\,[3]$

Multiples. Division euclidienne Congruence Algorithme

Multiples et diviseurs

EXERCICE 1

Dresser la listes des diviseurs de : 150 et 230

EXERCICE 2

Déterminer les couples (x, y) d'entiers naturels qui vérifient : $x^2 = y^2 + 21$

EXERCICE 3

Déterminer les entiers relatifs n qui vérifient :
a) $n^2 + n = 20$ b) $n^2 + 2n = 35$

EXERCICE 4

Déterminer les entiers relatifs n tel que :
a) $n + 1$ divise $3n - 4$ b) $n + 3$ divise $n + 10$

EXERCICE 5

Montrer que pour tout entier relatif a, 6 divise $a(a^2 - 1)$

EXERCICE 6

Soit l'équation (E) dans $\mathbb{N}$: $xy - 5x - 5y - 7 = 0$

a) Montrer que : $xy - 5x - 5y - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 5)(y - 5) = 32$

b) Résoudre alors l'équation (E).

EXERCICE 7

n est un naturel. Démontrer que quel que soit n, $3n^4 + 5n + 1$ est impair et en déduire que ne nombre n'est jamais divisible par $n(n + 1)$.

Division euclidienne

EXERCICE 8

Écrire la division euclidienne de -5000 par 17.

EXERCICE 9

La différence entre deux naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers naturels

EXERCICE 10

Trouver les entiers naturels n qui divisés par 4 donne un quotient égal au reste.

EXERCICE 11

Trouver un naturel qui, divisé par 23, donne pour reste 1 et, divisé par 17, donne le même quotient et pour reste 13.

EXERCICE 12

Le quotient d'un entier relatif x par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ? En déduire quelles sont les valeurs de x possibles.

EXERCICE 13

Si l'on divise un entier a par 18, le reste est 13. Quel est le reste de la division de a par 6 ?

EXERCICE 14

Si l'on divise un entier A par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles de la division de A par 18 ?

EXERCICE 15

La division euclidienne de a par b donne $a = 625b + 8\,634$. De quels naturels peut-on augmenter à la fois a et b sans changer de quotient.

Algorithme

EXERCICE 16

Pour faire comprendre la division - d'un entier naturel par un entier naturel non nul - à l'école primaire, on procède par soustractions successives. C'est à dire que si l'on veut diviser 32 par 5, on soustrait 5 à 32 autant de fois que cela est possible.

$$\begin{aligned} 32 - 5 &= 27 \\ 27 - 5 &= 22 \\ 22 - 5 &= 17 \\ 17 - 5 &= 12 \\ 12 - 5 &= 7 \\ 7 - 5 &= 2 \end{aligned}$$

On a ainsi enlever 6 fois 5 et il reste 2, on peut donc écrire :

$$32 = 5 \times 6 + 2$$

1) Écrire un algorithme permettant de trouver le quotient q et le reste r de la division dans $\mathbb{N}$ de a par $b \neq 0$ par cette méthode. Tester cet algorithme avec : 32 par 5 ; 12 par 13 et 1412 par 13.
2) Améliorer cet algorithme de façon à ce qu'il puisse trouver le quotient q et le reste r de la division d'un entier relatif a par un entier naturel $b \neq 0$. Tester cet algorithme avec : -114 par 8.

EXERCICE 17

On a vu en cours que pour trouver tous les diviseurs d'un entier $n \geqslant 2$, on commence à écrire dans deux colonnes 1 et N puis on teste si les nombres à partir de 2 sont diviseurs de N en s'arrêtant lorsque de nombre de la colonne de gauche est plus petit que la colonne de droite. Pour 120, cela donne :

Rang	Diviseurs	Diviseurs	Rang
1	1	120	16
2	2	60	15
3	3	40	14
4	4	30	13
5	5	24	12
6	6	20	11
7	8	15	10
8	10	12	9

Faire un algorithme qui utilise ce procédé. On testera avec 120

Congruence

Exercice 18

Pour chaque valeur de a donnée, trouver un relatif x tel que :
$a \equiv x \pmod 9$ et $-4 \leqslant x < 5$

a) $a = 11$
b) $a = 24$
c) $a = 62$
d) $a = 85$
e) $a = -12$
f) $a = 32$

Exercice 19

Démontrer que pour tout naturel k, on a : $5^{4k} - 1$ divisible par 13.

Exercice 20

Trouver les restes de la division euclidienne par 7 des nombres :
$351^{12} \times 85^{15}$ et $16^{12} - 23^{12}$

Exercice 21

Trouver les restes de la division euclidienne par 11 des nombres suivants :
12^{15}, 10^{7}, 78^{15}, 13^{12}, $(-2)^{19}$.

Exercice 22

Vérifier que $2^4 \equiv -1 \pmod{17}$ et $6^2 \equiv 2 \pmod{17}$. Quel est le reste de la division par 17 des nombres $1\,532^{20}$ et 346^{12}.

Exercice 23

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les système suivants :

a) $\begin{cases} x \equiv -2 \pmod 5 \\ x > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2 \equiv -1 \pmod 7 \\ 100 \leqslant x < 125 \end{cases}$

Exercice 24

Le nombre n désigne un naturel.

a) Démontrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisible par $n + 1$.
b) Déterminer l'ensemble de valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.
c) En déduire que, quel que soit n, $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

Exercice 25

Démontrer que pour tout entier naturel n, $5^{2n} - 14^n$ est divisible par 11.

Exercice 26

a) Démontrer que pour tout entier n, n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4, modulo 8

b) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(n+3)^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$

Exercice 27

a) Quels sont les restes possibles de la division de 3^n par 11 ?

b) En déduire les entier n pour lesquels $3^n + 7$ est divisible par 11.

Exercice 28

Déterminer les entiers n tels que $2^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 29

x est un relatif.

a) Déterminer les restes de la division euclidienne de x^3 par 9 selon les valeurs de x.

b) En déduire que pour tout relatif x :
- $x^3 \equiv 0 \pmod 9$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod 3$.
- $x^3 \equiv 1 \pmod 9$ équivaut à $x \equiv 1 \pmod 3$.
- $x^3 \equiv 8 \pmod 9$ équivaut à $x \equiv 2 \pmod 3$.

c) x, y, z sont des relatifs tels que : $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9.
Démontrer que l'un des nombres x, y, z est divisible par 3.

Exercice 30

a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_1$, des entiers relatifs x tels que le nombre $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 7.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des entiers relatifs x tels que le nombre $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 3.

c) k est un relatif. Vérifier que si $x = 1 + 21k$ ou $x = -2 + 21k$ alors $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 42.

Exercice 31

Antille-Guyane juin 2005

1) a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

   b) Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7\ (9)$.

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1\ (9)$.

   b) On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.
   Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\ (9)$.

c) En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3) On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :
- B la somme des chiffres de A ;
- C la somme des chiffres de B ;
- D la somme des chiffres de C.

a) Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\ (9)$.

b) Sachant que $2005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leqslant 72180$.

c) Démontrer que $C \leqslant 45$.

d) En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e) Démontrer que $D = 7$.

Exercice 32

Antille-Guyane juin 2012 extrait

On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{\text{A}}{\text{N}}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{\text{A}}{\text{N}}$.

```
A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que N ⩽ √A
        Si A/N − Ent(A/N) = 0 alors Afficher N et A/N
        Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.
```

Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?
Que donne cet algorithme dans le cas général ?

Exercice 33

Vrai-Faux

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Proposition 1 : Le reste de la division euclidienne de 2011^{2011} par 7 est 2.

Proposition 2 : 11^{2011} est congru à 4 modulo 7

Proposition 3 : « $x^2 + x + 3 \equiv 0$ (modulo 5) si et seulement si $x \equiv 1$ (modulo 5). »

Exercice 34

Antille Guyane 2011 extrait

On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

1) Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.
2) Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?
3) En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

EXERCICE 35

Amérique du Sud 2010 extrait

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.

1) Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
2) Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
3) Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$: $n^8 \equiv 1 \quad \text{mod } d$.

EXERCICE 36

Nouvelle-Calédonie 2009 extrait

On considère l'équation notée (G)

$$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

1) Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).
Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).
2) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

3) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

EXERCICE 37

Polynésie 2005

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n$ (modulo 4).
   En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2$ (modulo 4) et $u_{2k+1} \equiv 0$ (modulo 4).
3) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28$ (modulo 100).
4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

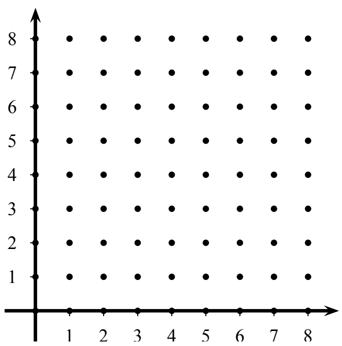
EXERCICE 38

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthogonal, dont les coordonnées $(x; y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$. On note $R_{a,b}$ ce réseau.
Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

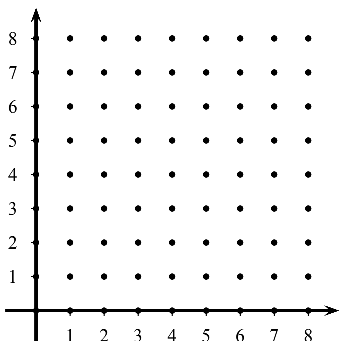
Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille ci-dessous.
Représenter graphiquement les points $M(x; y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

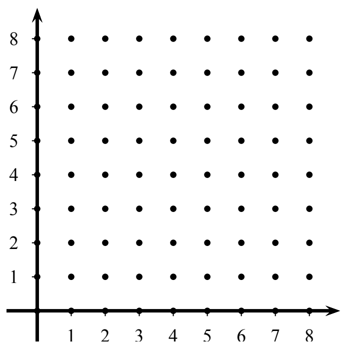
1) $x \equiv 2$ (modulo 3) et $y \equiv 1$ (modulo 3), sur le graphique 1.
2) $x + y \equiv 1$ (modulo 3), sur le graphique 2.
3) $x \equiv y$ (modulo 3), sur le graphique 3.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3