Mercredi 22 novembre 2023 - TG - Espace

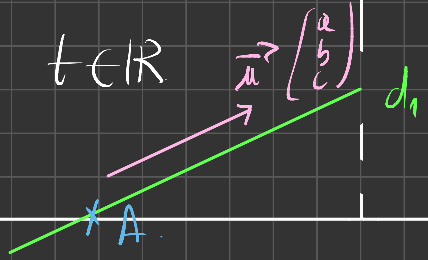
Position relative de deux droites dans l'espace ?

- Coplanaires
  - Sécantes
  - //
- Non coplanaires.

Équation paramétrique d'une droite dans l'espace.

$A \in (d_1)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$d_1 \begin{cases} x = x_A + a t \\ y = y_A + b t \\ z = z_A + c t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



plus de bonnes notes

Exercice d'application : Soient deux points :

$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-4\\2\\5\end{pmatrix}$.

Déterminez l'éq° paramétrique de (AB).

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-5\\0\\2\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Démontrer que A, B, C, D sont coplanaires.

2. On donne les points $A(4\,;3\,;-1)$, $B(0\,;-3\,;5)$, $C(2\,;1\,;1)$ et $D(4\,;4\,;-1)$.
Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

3. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

4. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

3) Supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

$$\vec{w} = \mu \times \vec{u} + \lambda \vec{v}.$$

$$\vec{w} = \mu \times \vec{u} + \lambda \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \mu \times \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 1 = 3\mu + \lambda. \\ 2 = 6\mu + 2\lambda. \\ -1 = +2\lambda. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\mu + \lambda = 1 \\ 2\lambda = -1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\mu - \frac{1}{2} = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{2}. \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$6\mu + 2\lambda = 6 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 3 - 1 = 2.$$

Le système est compatible donc les vecteurs sont coplanaires.

Exercice 4 **corrigé disponible**

$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace.

On donne $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$; $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{w}=\vec{k}$

1. Justifier que les vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ forment une base dans l'espace
2. Exprimer les vecteurs $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ en fonction de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$
3. Soit $\vec{s}=4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Exprimer $\vec{s}$ dans la base $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$

1) On suppose que $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires :

$$\vec{w}=\mu\vec{u}+\lambda\vec{v}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}0=2\mu-\lambda\\0=-3\mu+\lambda\\1=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires

donc ils forment une base de l'espace.

2)
$$\begin{cases}\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}\\ \vec{v}=-\vec{i}+\vec{j} \quad)\times 2\\ \vec{w}=\vec{k}\end{cases} \qquad \begin{cases}\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}\\ 2\vec{v}=-2\vec{i}+2\vec{j}\\ \vec{k}=0\vec{u}+0\vec{v}+1\vec{w}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{u}+2\vec{v}=-\vec{j}\\ 2\vec{v}=-2\vec{i}+2\vec{j}\\ \vec{k}=0\vec{u}+0\vec{v}+\vec{w}\end{cases} \qquad \begin{cases}\vec{j}=-\vec{u}-2\vec{v}\\ 2\vec{v}=-2\vec{i}+2(-\vec{u}-2\vec{v})\\ \vec{k}=0\vec{u}+0\vec{v}+\vec{w}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{j}=-\vec{u}-2\vec{v}\\ 2\vec{v}=-2\vec{i}-2\vec{u}-4\vec{v}\\ \vec{k}=\vec{w}\end{cases} \qquad \begin{cases}\vec{j}=-\vec{u}-2\vec{v}\\ -2\vec{i}=6\vec{v}+2\vec{u}\\ \vec{k}=\vec{w}\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}\vec{j}=-\vec{u}-2\vec{v}\\ \vec{i}=-3\vec{v}-\vec{u}\\ \vec{k}=\vec{w}\end{cases}}$$

3) $\vec{s}=4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

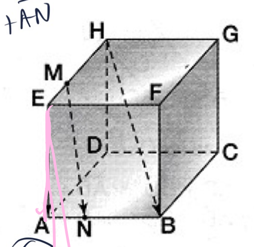
$\vec{s}=4\times(-3\vec{v}-\vec{u})+(-\vec{u}-2\vec{v})+\vec{w}$

$\vec{s}=-12\vec{v}-4\vec{u}-\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}=-14\vec{v}-5\vec{u}+\vec{w}$

Exercice 7 **corrigé disponible**

Soit le cube $ABCDEFGH$. M est le point tel que $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et N le point tel que $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AN}$



1. Démontrer que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont-ils coplanaires ?

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AN}$$
$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})$$
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HB})$$
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\times\overrightarrow{DH}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$
$$\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$

Vecteurs, droites et plans dans l'espace – Exercices - Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

1. On donne les points $A(5 ;2 ;1)$, $B(7 ;3 ;1)$, $C(-1 ;4 ;5)$ et $D(-3 ;3 ;5)$.
Démontrer que A, B, C, D sont coplanaires.

2. On donne les points $A(4 ;3 ;-1)$, $B(0 ;-3 ;5)$, $C(2 ;1 ;1)$ et $D(4 ;4 ;-1)$.
Les droites (AC) et (BD) sont –elles parallèles ?

3. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

4. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 2 corrigé disponible

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace.

1. Les vecteurs $\vec{e_1}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{e_2}=\vec{i}+\vec{k}$ et $\vec{e_3}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ sont-ils coplanaires ?

2. Même question pour les vecteurs $\vec{e_1}=\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{e_2}=6\vec{i}-3\vec{j}+16\vec{k}$ et $\vec{e_3}=\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$.

Exercice 3 corrigé disponible

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace.

1. Les vecteurs $\vec{e_1}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{e_2}=-\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ et $\vec{e_3}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ sont-ils linéairement indépendants ? Que peut-on en déduire ?

2. Mêmes questions pour $\vec{e_1}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{e_2}=-\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$ et $\vec{e_3}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Exercice 4 corrigé disponible

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace.

On donne $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$; $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{w}=\vec{k}$

1. Justifier que les vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ forment une base dans l'espace
2. Exprimer les vecteurs $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ en fonction de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$
3. Soit $\vec{s}=4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Exprimer $\vec{s}$ dans la base $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$

Exercice 5 corrigé disponible

Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les vecteurs :

$$\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\vec{j}-\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v}=\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}-\sqrt{2}\vec{k}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 6 corrigé disponible

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace

1. Soient $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+6\vec{j}-\frac{15}{2}\vec{k}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

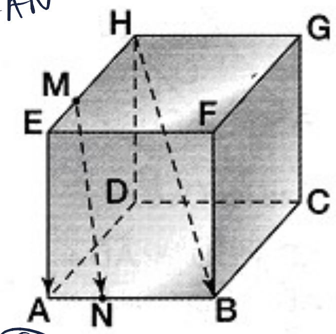
2. Soient $\vec{u}=2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ et $\vec{v}=-\vec{i}-2\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 7 corrigé disponible

Soit le cube $ABCDEFGH$. M est le point tel que $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et N le point tel que $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN}$



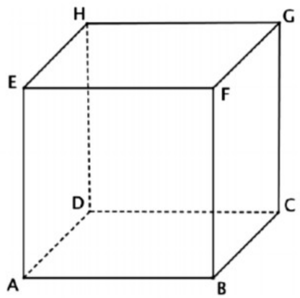
1. Démontrer que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 8 corrigé disponible

Choisir la ou les bonnes réponses.
Dans un cube $ABCDEFGH$,

1) les droites (CD) et (EH) sont :
   a) sécantes.
   b) parallèles.
   c) non coplanaires.
2) la droite (CD) et le plan (AFH) sont :
   a) sécants.
   b) parallèles.
   c) (CD) est incluse dans (AFH).
3) les plans (CFH) et (ABD) sont :
   a) sécants.
   b) parallèles.
   c) confondus.
4) les plans (FCH) et (BDE) sont :
   a) sécants.
   b) parallèles.
   c) confondus.



Exercice 9 corrigé disponible

On considère le cube $ABCDEFGH$ et les points P et Q définis par :

$$\overrightarrow{CP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$$

1) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AQ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3) Que peut-on en déduire pour les points A, P et Q ?
4) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{PC}$ ne forment pas une base de l'espace.
5) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{QC}$ forment une base de l'espace.

Exercice 10 corrigé disponible

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 4+t \\ y = 6+2t \\ z = 4-t \end{cases}, \quad t \in R, \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 8+5t' \\ y = 2-2t' \\ z = 6+t' \end{cases}, \quad t' \in R.$$

Affirmation : les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont coplanaires.

Exercice 11 corrigé disponible

Les systèmes de vecteurs suivants représentent-ils une base de l'espace :

1. $\vec{u}(1;0;2)$ $\vec{v}(4;-1;2)$ $\vec{w}(-10;3;-2)$
2. $\vec{u}(1;2;3)$ $\vec{v}(2;1;3)$ $\vec{w}(3;1;2)$

Exercice 12 corrigé disponible

$SABCD$ est une pyramide de sommet S, de base un parallélogramme $ABCD$.
Les points M et N sont les milieux respectifs des arêtes $[SC]$ et $[SB]$.

1. Faire une figure en perspective.
2. Que peut-on dire des droites (MN) et (AD) ?
3. Montrer que les droites (AN) et (DM) sont coplanaires. Soit P leur point d'intersection.
4. Quelle est l'intersection des plans (SAB) et (SDC) ?
5. Montrer que les droites (SP) et (AB) sont parallèles.

Exercice 13 corrigé disponible

l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$.

1) Soit S le point de coordonnées $(1\,;3\,;5)$ et Δ_1 la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Affirmation 1 : la droite Δ_2 de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 7 + 4t \\ z = 7 + 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

est la droite parallèle à la droite Δ_1 passant par le point S.

Exercice 14 corrigé disponible

Positions relatives de deux droites

Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -5 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Etudier la position de la droite Δ avec les droites d_1, d_2 et d_3 de représentation paramétrique :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 7 - 6k \\ z = -3 + 3k \end{cases} \text{avec } k \in \mathbb{R} \quad d_2 : \begin{cases} x = 1 - h \\ y = 4 + h \\ z = 2 + 3h \end{cases} \text{avec } h \in \mathbb{R} \quad d_3 : \begin{cases} x = 10 + p \\ y = -9 - 2p \\ z = 5 + p \end{cases} \text{avec } p \in \mathbb{R}.$$

Exercice 15 corrigé disponible

Application de l'associativité du barycentre

On a découvert dans l'exercice précédent la définition de l'associativité du barycentre :

si $a + b \neq 0$ et $a + b + c \neq 0$ alors

G est le barycentre de $(A\,;a)$, $(B\,;b)$ et $(C\,;c)$ $\Leftrightarrow$ G est le barycentre de $(K\,;a+b)$ et $(C\,;c)$

où K est le barycentre de $(A\,;a)$ et $(B\,;b)$.

$ABCD$ est un tétraèdre et I, J, K, L, M etr N sont les milieux respectifs des segments : $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[CD]$.

On note O le barycentre de $(A\,;1)$, $(B\,;1)$, $(C\,;1)$ et $(D\,;1)$.

Montrer que (KM), (JL) et (IN) sont concourantes.

Exercice 16 corrigé disponible

On considère les droites d et d' de représentations paramétriques suivantes :

$$d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - k \\ z = 4 - 3k \end{cases} \text{avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 4t \\ z = 1 \end{cases} \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on donnera les coordonnées.
2) Justifier que le point $B(3\,;\,-7\,;2)$ n'appartient pas au plan défini par d et d'.
3) A tout point M de la droite d', on associe la fonction définie par :

$$f(t) = BM^2$$

   a) Exprimer $f(t)$ en fonction du paramètre t.
   b) Déterminer la valeur t_0 pour laquelle cette fonction admet un minimum.
   c) Donner les coordonnées du point M_0 de d' qui a pour abscisse t_0.
   d) Que représente M_0 ?

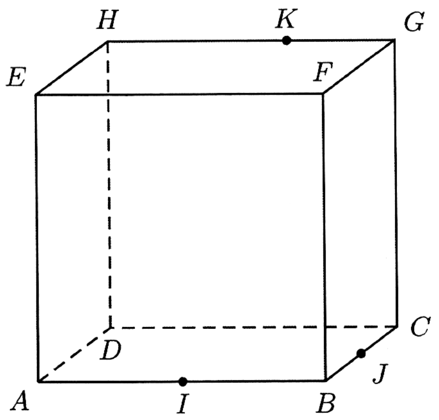
Exercice 17 corrigé disponible

On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.
2. Déterminer l'expression du vecteur $\vec{t}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

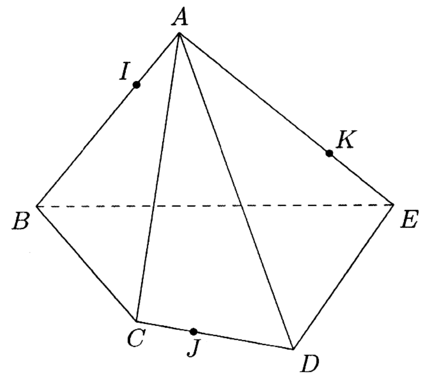
Exercice 18 **corrigé disponible**

Tracer la section par le plan (IJK).



Exercice 19 **corrigé disponible**

Tracer la section par le plan (IJK).



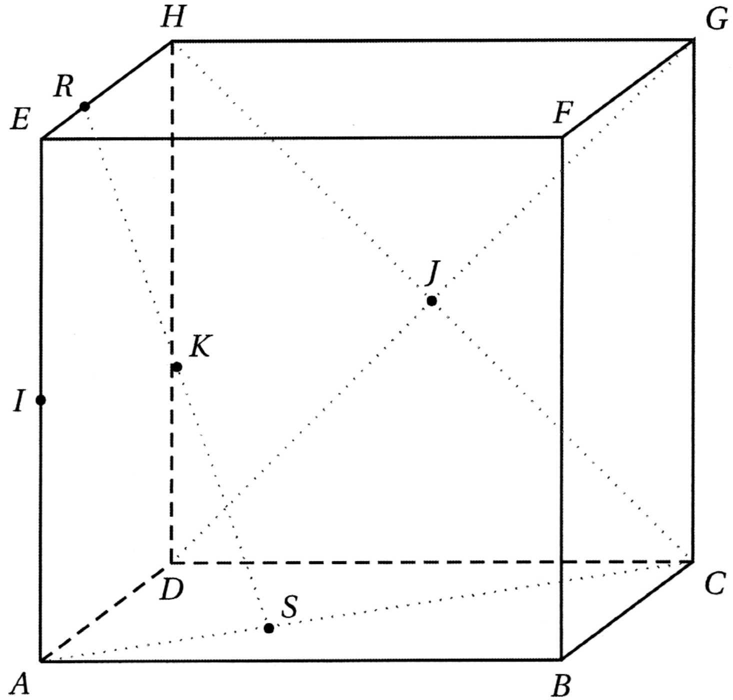
Exercice 20 **corrigé disponible**

ABCDEFGH est un cube de longueur 1.

On note I le milieu de [AE], J le centre de la face CDHG, R et S sont définis par $\overrightarrow{ER}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. K est le milieu du segment [RS].

La figure est donnée ci-dessous. On se place dans le repère $\left(A\ ,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **(a)** Calculer les coordonnées des points I et J.
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. **(a)** Vérifier que $R\left(0\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ 1\right)$ et $S\left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ 0\right)$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point K.
   (c) Démontrer que les points I, K et J sont alignés.
   (d) En déduire que les points I, J, K, R et S sont coplanaires.



Exercice 21 **corrigé disponible**

L'espace est rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points *A*, *B*, et *C* ont pour coordonnées respectives :

$A(1\,;-1\,;2)$ $B(3\,;3\,;8)$ $C(-3\,;5\,;4)$

On note D la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=t+2 \\ y=2t-1 \\ z=3t-4 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

et D' la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=s+3 \\ y=2s+1 \\ z=-s+3 \end{cases} \quad s\in\mathbb{R}$$

Cet exercice est un QCM. Une seule des réponses proposées est exacte.

(a) Les droites D et D' sont parallèles.

(b) Les droites D et D' sont coplanaires.

(c) Le point *C* appartient à la droite D.

(d) Les points *A*, *B* et *C* sont alignés.

Exercice 22 **corrigé disponible**

Cet exercice est un QCM. Une seule des réponses proposées est exacte.

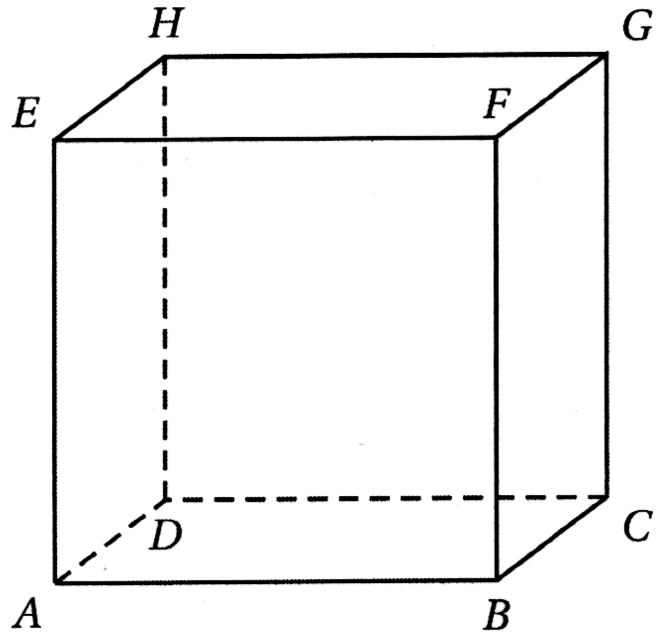
ABCDEFGH est un cube d'arête 1. *I* est le centre de la face *BCGF*, *K* et *J* sont les milieux respectifs de [*DC*] et [*BC*].

(a) Le plan (EGJ) coupe le segment (AB] en son milieu.

(b) La droite (KH) coupe le plan (EGJ) en un point.

(c) Le triangle DIB est rectangle en B.

(d) Les droites (EF) et (DI) ne sont pas coplanaires.



Exercice 23 **corrigé disponible**

Equations paramétriques d'une droite

1) Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t-2 \\ y = 4t \\ z = 2t-1 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

a) Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ.

b) Le point $M(-3\,;4\,;-3)$ appartient-il à la droite Δ ?

c) Donner les coordonnées de trois points de Δ.

d) Déterminer une autre représentation paramétrique de la droite Δ.

2) Soient $A(-4\,;1\,;2)$ et $B(-1\,;2\,;5)$.

Donner une représentation paramétrique de chacun des objets géométriques suivants :

a) La droite (AB).

b) Le segment $[AB]$.

c) La demi-droite $[AB)$.

Exercice 24 corrigé disponible

On considère une droite (d) dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1) Déterminer un vecteur directeur de (d) en justifiant
2) Le point A(-17 ;-35 ;-19) appartient-il à (d) ? Justifier.
3) On considère la droite (AB) telle que A(- 4 ;1 ; 2) et B (5 ;-2 ;1).

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) en justifiant.

4) Les droites (d) et (AB) sont-elles sécantes ? Justifier. Si tel est le cas, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 25 corrigé disponible

Pour chacune des deux affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué 3,5 points par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace ;

1) On considère les droites D_1 et D_2 qui admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -5t' + 3 \\ y = 2t' \\ z = t' + 4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

Affirmation 1

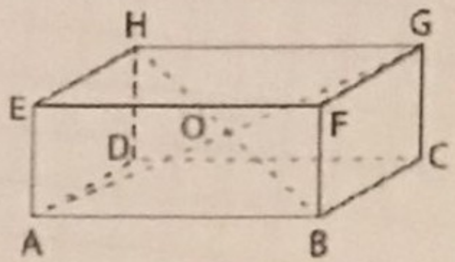
Les droites D_1 et D_2 sont sécantes.

2) On considère la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2, \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et la droite Δ passant par le point $D(1; 4; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2; 1; 3)$.

Affirmation 2 : la droite d et la droite Δ ne sont pas coplanaires.

Exercice 26

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle de centre le point O.



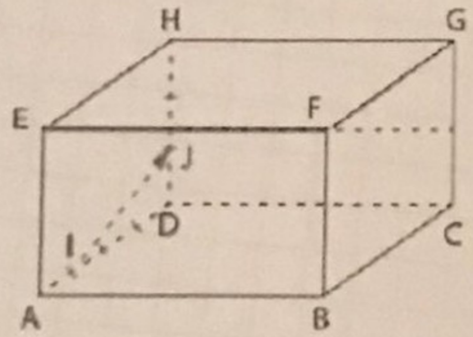
a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont-ils coplanaires ? Justifier la réponse.

Exercice 27

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.

I et J sont les points définies par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.



a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.

b) En déduire la position relative de la droite (IJ) et du plan (BCG).

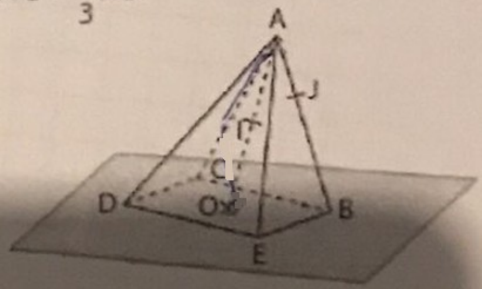
Exercice 28

On considère un cube ABCDEFGH et les points P et Q définis par $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{EQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$.

1. Décomposer le vecteurs $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AQ}$ en fonction des deux mêmes vecteurs.
3. Que peut-on en déduire pour les points A, P et Q ?
4. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{PC}$ ne forment pas une base de l'espace.
5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{QC}$ forment une base de l'espace.

Exercice 29

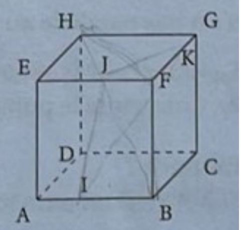
On considère une pyramide ABCDE de base le parallélogramme BCDE. Le point O est le centre du parallélogramme, le point I est le milieu du segment [AO] et le point J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.



1. Justifier les relations suivantes $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IE}$, $2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}$.
2. En déduire que la droite (IJ) passe par le point D.

Exercice 30

Soit $ABCDEFGH$ un cube et I, J, K les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[EF]$, $[FG]$.
Etudier la position relative :

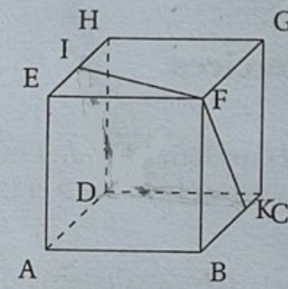


1. des droites (EF) et (HK) ;
2. de la droite (IK) et du plan (BCF) ;
3. de la droite (AI) et du plan (FGC) ;
4. des plans (EFG) et (EAD) ;
5. des plans (IJK) et (BFH).

Exercice 30

Soit $ABCDEFGH$ un cube, I et K les points des arêtes $[EH]$ et $[BC]$ tels que :

$$EI = \frac{1}{2}EH \text{ et } CK = \frac{1}{4}CB.$$



1. Construire la section du cube par le plan (IFK).
2. Construire la section du cube par le plan (HFK).
3. Construire la section du cube par le plan (GIK).

Exercice 31

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de l'arête $[AD]$, G un point de la face ABC distinct des sommets et tel que la droite (IG) ne soit pas parallèle au plan (BCD). On note N l'intersection de la droite (IG) et du plan (BCD).
Construire le point N en justifiant les différentes étapes de la construction.

Exercice 32

Soit $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ une base de l'espace. On donne $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{k}$ et $\vec{w}=2\vec{i}+\vec{j}$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment-ils une base de l'espace ?

Exercice 33

Soit $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ une base de l'espace. On donne $\vec{u}=\vec{i}$ et $\vec{v}=-\vec{i}-2\vec{j}$.

1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants. Ces vecteurs forment-ils une base de l'espace ?
2. Exprimer les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. On considère le vecteur $\vec{s}=x\vec{i}+y\vec{j}$ où x et y sont réels. Démontrer qu'il existe un couple $(\lambda;\mu)$ de réels tels que $\vec{s}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$.

Exercice 34

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1;0;1)$, $B(2;2;4)$, $C(3;0;5)$ et $D(5;-4;7)$.

Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 35

Soit $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ une base de l'espace. On donne $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{v}=\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$.

Déterminer un vecteur $\vec{w}$ tel que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient linéairement indépendants.

Exercice 36

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) et du plan (ABC) dans les cas suivants :

1. $A(1;2;3)$, $B(-1;3;4)$ et $C(0;0;1)$
2. $A(2;3;-2)$, $B(2;1;1)$ et $C(1;1;1)$
3. $A(0;0;1)$, $B(1;2;0)$ et $C(1;0;0)$
4. $A(1;0;0)$, $B(0;0;3)$ et $C(0;2;0)$

Exercice 37

Dans chacun des cas suivants, donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. $A(-1;2;5)$ et $\vec{u}\,(1\,;0\,;2)$
2. $A(1;7;3)$ et $\vec{u}\left(5\,;1\,;-\frac{1}{3}\right)$
3. $A(-1;0;4)$ et $\vec{u}=\vec{k}$

Exercice 38

On considère les points $A(-3\,;2\,;4)$ et $B(-1\,;1\,;0)$.

Ecrire une représentation paramétrique de la droite (AB).