Les suites numériques

Généralités sur les suites

EXERCICE 1

Pour les suites suivantes, trouver la fonction f associée à la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et calculer les termes de u_1 à u_4

a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n} \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

EXERCICE 2

Pour les suites suivantes, calculer les termes de u_1 à u_5 puis **conjecturer une formule explicite** du terme général. Retrouver alors u_0 à partir de la formule conjecturée puis démontrer la relation donnée entre u_{n+1} et u_n.

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1 + u_n} \end{cases}$

EXERCICE 3

Pour les exercices suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

a) $\boxed{u_n = \dfrac{3n - 2}{n + 1}}$

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$

b) $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$

c) $u_n = (n - 5)^2, \quad n \geqslant 5$

d) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - n$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{2^n}{n}$

EXERCICE 4

1) Quelle est la suite (u_n) définie par récurrence dont ce programme calcule le terme u_n.

2) On prend $A = 2$
   a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b) Ecrire ce programme sur votre calculette puis donner une approximation du terme u_{10}.
   c) Que semble calculer la suite (u_n) ?

3) Prenez plusieurs valeur de A, par exemple 3, 4, 9, 25, et indiquer le terme u_{10} qui permet de confirmer votre conjecture. Cette suite s'appelle la suite du Héron.

Variables : N, I entiers et A, U réels
Entrées et initialisation
  Lire A,N
  $1 \to U$
Traitement
  pour I variant de 1 à N **faire**
    $\dfrac{1}{2}\left(U + \dfrac{A}{U}\right) \to U$
  fin
Sorties : Afficher U

$$U_n = \frac{3n-2}{n+1}$$

$$U_{n+1} = \frac{3(n+1)-2}{n+1+1} = \frac{3n+3-2}{n+2}$$

$$\boxed{U_{n+1} = \frac{3n+1}{n+2}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1}.$$

$$= \frac{(3n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(3n-2)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(3n+1)(n+1) - (3n-2)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{\cancel{3n^2}+3n+n+1-(\cancel{3n^2}+6n-2n-4)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{\cancel{4n}+1-\cancel{4n}+4}{(n+1)(n+2)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{5}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$$

. $5 > 0$

. $(n+1)(n+2) > 0$

$n \in \mathbb{N}$ donc :

$n \geq 0.$ $\quad n+1 \geq 0+1 = 1 > 0.$

$n+1 \geq 0+1$ $\quad n+2 \geq 0+2 = 2 > 0.$

Donc $(n+1)(n+2) > 0$.

Donc $\dfrac{5}{(n+1)(n+2)} > 0$

Donc $U_{n+1} - U_n > 0$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

b) $U_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$.

On remarque : $U_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$n=0$: $\dfrac{2^{3\times 0}}{3^{2\times 0}} = \dfrac{2^0}{3^0} = \dfrac{1}{1} = 1$.

$$U_{n+1} = \frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}$$

$$= \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}}.$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}} = \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}}.$$

$$= \frac{2^{3n+3}}{2^{3n}} \times \frac{3^{2n}}{3^{2n+2}}.$$

$$= 2^{3n+3-3n} \times 3^{2n-(2n+2)}$$

$$= 2^{3} \times 3^{-2}.$$

$$= \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} < 1$$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$\begin{cases} a^b \times a^c = a^{b+c} \\ \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} \\ (a^b)^c = a^{b\times c}. \end{cases}$$

c) $U_n = (n-5)^2$, $n \geq 5$.

$U_{n+1} = (n+1-5)^2 = (n-4)^2$.

$U_{n+1} - U_n = (n-4)^2 - (n-5)^2$

$a^2 - b^2$

3ème IR : $(a-b)(a+b)$

$= (n-4-(n-5)) \times (n-4+n-5)$.

$= (\cancel{n}-4-\cancel{n}+5) \times (2n-9)$.

$= 2n-9 > 0$.

$$\boxed{\begin{aligned} & n \geq 5 \\ \Leftrightarrow\ & 2n \geq 5 \times 2 \\ \Leftrightarrow\ & 2n-9 \geq 5 \times 2 - 9 \\ \Leftrightarrow\ & 2n-9 \geq 1 > 0. \end{aligned}}$$

Donc $(U_n)_{n \geq 5}$ est strictement croissante.

EXERCICE 2

Pour les suites suivantes, calculer les termes de u_1 à u_5 puis **conjecturer une formule explicite** du terme général. Retrouver alors u_0 à partir de la formule conjecturée puis démontrer la relation donnée entre u_{n+1} et u_n.

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$

a) . $U_0 = 1$.

. $U_1 = U_{0+1} = \frac{1}{2} U_0 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

. $U_2 = U_{1+1} = \frac{1}{2} U_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

. $U_3 = U_{2+1} = \frac{1}{2} U_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

. $U_4 = U_{3+1} = \frac{1}{2} U_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

. $U_5 = U_{4+1} = \frac{1}{2} U_4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$.

Formule explicite ? $U_n = f(n)$.

$\cancel{U_n = \frac{1}{2} \times n}$

$\boxed{U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$U_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$U_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

$U_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$

b) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 5. \end{cases}$

$U_1 = U_{0+1} = U_0 + 5 = 1 + 5 = 6.$

$U_2 = U_{1+1} = \underbrace{U_1}_{} + 5 = 6 + 5 = 11.$

$= (U_0 + 5) + 5.$

$= U_0 + 2 \times 5.$

$U_3 = U_{2+1} = \underbrace{U_2}_{} + 5 = 11 + 5 = 16.$

$= U_0 + 2 \times 5 + 5$

$= U_0 + 3 \times 5.$

c) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1+U_n}. \end{cases}$

$U_1 = U_{0+1} = 1 - \dfrac{1}{1+U_0} = 1 - \dfrac{1}{1+1}$

$= 1 - \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{2}.$

$$U_2 = U_{1+1} = 1 - \frac{1}{1+U_1} = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b}.$$

$$= 1 - \frac{2}{3}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

$$= \frac{3-2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

$$U_3 = 1 - \frac{1}{1+U_2} = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{\frac{4}{3}}$$

$$= 1 - \frac{3}{4}$$

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}.$$

$$U_4 = 1 - \frac{1}{1+U_3} = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{\frac{5}{4}}$$

$$= 1 - \frac{4}{5}$$

$$= \frac{1}{5}.$$

De même : $U_5 = \dfrac{1}{6}$.

On fait l'hypothèse suivante :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_n = \dfrac{1}{n+1}}$

a) $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{U_n+1} \end{cases}$.

$$U_1 = \underbrace{U_{0+1}}_{n=0} = \frac{2U_0}{U_0+1} = \frac{2\times5}{5+1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

$$U_2 = \underbrace{U_{1+1}}_{n=1} = \frac{2U_1}{U_1+1} = \frac{2\times\frac{5}{3}}{\underbrace{\frac{5}{3}+1}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{10}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{8}$$

$$\frac{5}{3}+\frac{3}{3}=\frac{8}{3}. \qquad = \frac{10}{8}.$$

$$\boxed{U_2 = \frac{5}{4}.}$$

$$U_3 = \underbrace{U_{2+1}}_{n=2} = \frac{2U_2}{U_2+1} = \frac{2\times\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}+1} = \frac{\frac{10}{4}}{\frac{9}{4}} \boxed{= \frac{10}{9}}$$

$$U_4 = \underbrace{U_{3+1}}_{n=3} = \frac{2U_3}{U_3+1} = \frac{2\times\frac{10}{9}}{\frac{10}{9}+1} = \frac{\frac{20}{9}}{\frac{19}{9}} \boxed{= \frac{20}{19}}.$$

b) $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = (U_n+1)^2 \end{cases}$

$\downarrow$

$n=0$

$u_1 = (-1+1)^2 = 0$

$u_2 = (0+1)^2 = 1$

$u_3 = (1+1)^2 = 4$

$u_4 = (4+1)^2 = 25$

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n + 1 = \dfrac{u_n - 1}{u_n} \end{cases}$

$u_1 = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$u_2 = \dfrac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$

$u_3 = \dfrac{-1-1}{-1} = \dfrac{-2}{-1} = \dfrac{2}{1} = 2$

$u_4 = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} U_0 = \dots \\ U_{n+1} = f(U_n). \end{cases}$$

Exercice 4

1) Quelle est la suite (u_n) définie par récurrence dont ce programme calcule le terme u_n.

2) On prend $A = 2$
   a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b) Ecrire ce programme sur votre calculette puis donner une approximation du terme u_{10}.
   c) Que semble calculer la suite (u_n) ?
3) Prenez plusieurs valeur de A, par exemple 3, 4, 9, 25, et indiquer le terme u_{10} qui permet de confirmer votre conjecture. Cette suite s'appelle la suite du Héron.

Variables : N, I entiers et A, U réels (n.)
Entrées et initialisation
- Lire A, N
- $1 \to U$

$1 \to U$ $\boxed{U_0 = 1}$

Traitement
- **pour** I variant de 1 à N **faire**
  - $\frac{1}{2}\left(U + \frac{A}{U}\right) \to U$
- **fin**

Sorties $\boxed{\text{Afficher } U}$

(U_n).

$n \in \mathbb{N}$.

U_n.

$n = 0$

$N - (1, \dots, n)$

$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{A}{U_n}\right)$.

---

1) $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{A}{U_n}\right), & A \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}. \\ U_0 = 1 \end{cases}$

2) $U_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right)$

$= \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}.$

$U_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right)$ $\qquad \frac{9}{6} + \frac{8}{6}.$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{17}{6}\right) = \frac{17}{12}$

$$v_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{289}{204} + \frac{288}{204}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{577}{204}\right) = \frac{577}{408} \approx \sqrt{2}.$$

$$v_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{2}{\frac{577}{408}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{816}{577}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{332\,929}{235\,416} + \frac{332\,928}{235\,416}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{665\,857}{235\,416}\right) \approx \sqrt{2}.$$