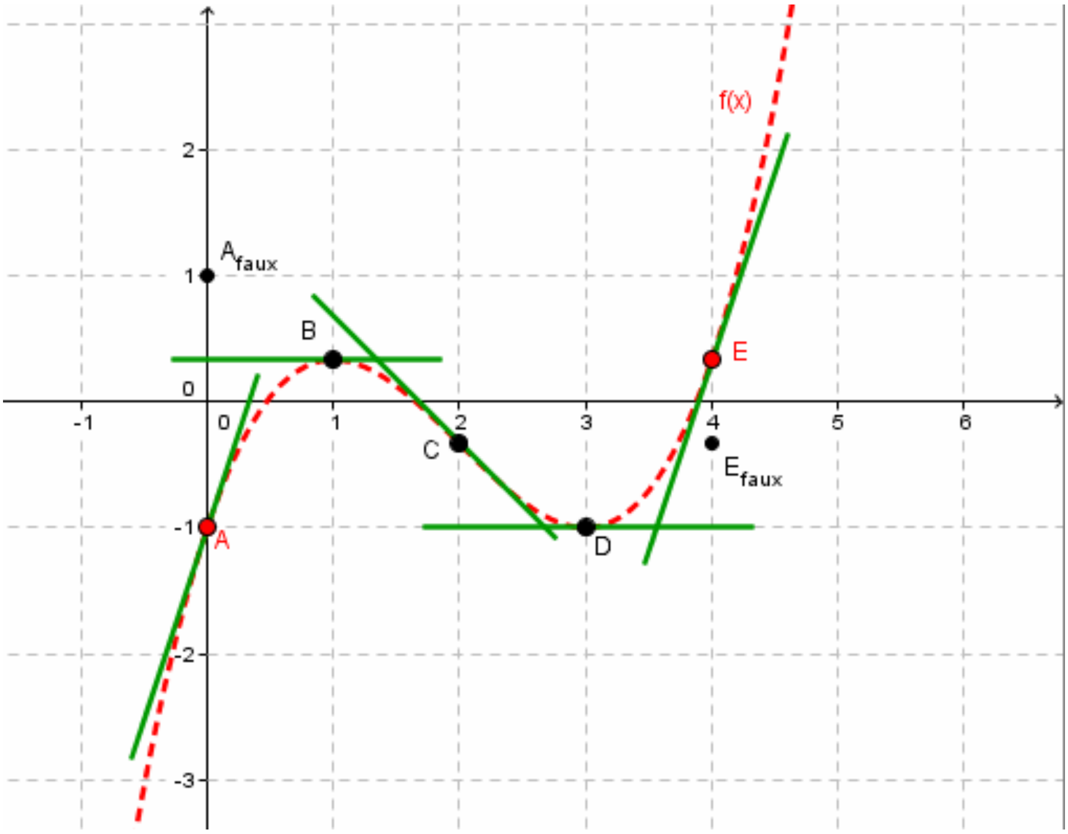
DERIVATION ET ETUDE DE FONCTION



Chapitre 3

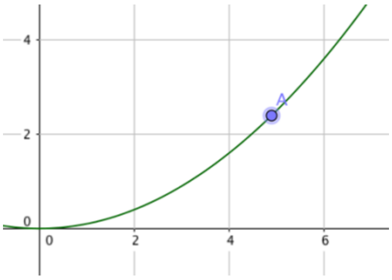
Nombre dérivé, fonction dérivée, étude de fonctions

Il s'agit d'un des chapitres les plus importants du lycée.

I. NOTION DE NOMBRE DERIVE

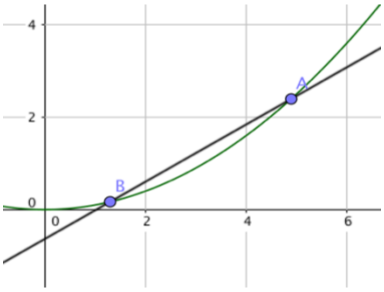
1. Introduction

Soit f une fonction définie sur $I = [a; b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$. On a alors la courbe représentative de la fonction f :



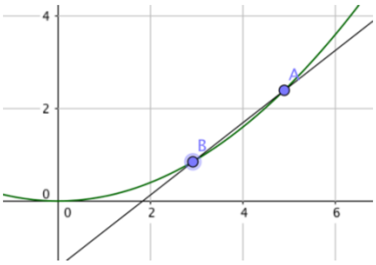
L'objectif ici est de tracer la tangente au point A, c'est-à-dire la droite qui passe par A en étant le plus fidèle possible à la courbure de la courbe représentative de la fonction.

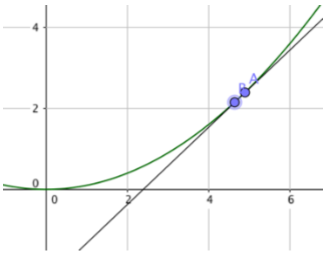
Pour cela on construit un point B libre sur C_f. C'est-à-dire que le point B peut se balader librement sur C_f. Puis on trace la droite (AB) :



On constate que la droite tracée ne correspond toujours pas à la tangente à la courbe C_f au point A.

Pour que la droite (AB) se rapproche de la tangente on rapproche le points B de A :





On constate bien que plus B se rapproche de A, plus la droite (AB) se rapproche de la véritable tangente à la courbe C_f au point A.

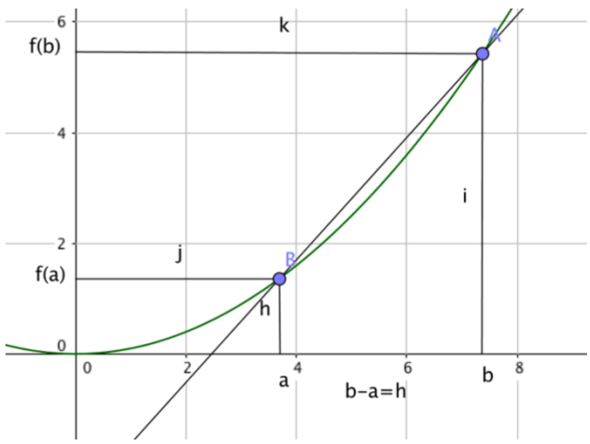
2. Formalisation mathématique du taux d'accroissement

Le coefficient directeur de la droite (AB) est appelé en mathématique le taux d'accroissement que l'on note τ :

$$\tau = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ici on pose $h = b - a \Leftrightarrow b = a + h$ on obtient donc :



On obtient ainsi l'expression finale du taux d'accroissement à connaître par cœur :

$$\tau = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

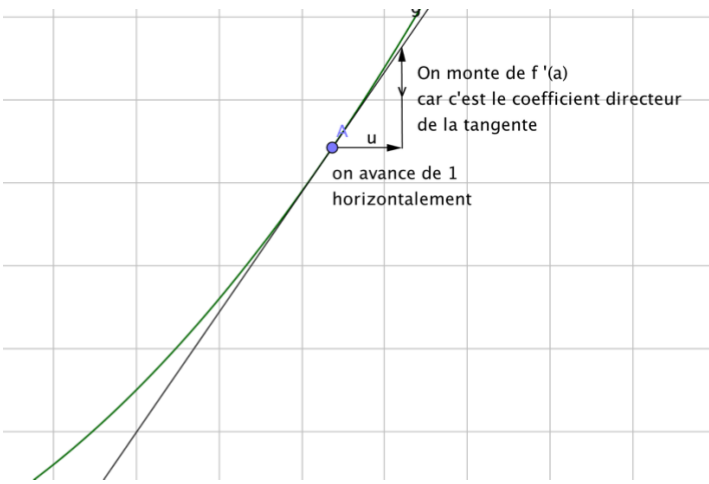
3. Formalisation mathématique du nombre dérivé

Définition géométrique

Le nombre dérivé d'une fonction en un point d'abscisse a est noté $f'(a)$. Il est égal au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.

Pour calculer ce coefficient directeur, il faut que b se rapproche de a c'est-à-dire que h doit se rapprocher de 0 mais sans jamais être égal à 0. On obtient ainsi la **définition algébrique** du nombre dérivé :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



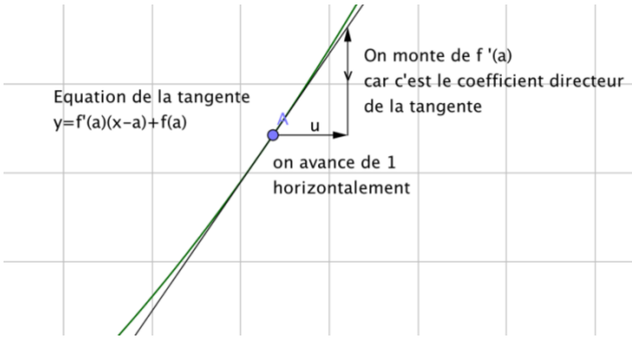
Exemple d'application

Calculer algébriquement le nombre dérivé de la fonction carrée $x \mapsto x^2$ au point d'abscisse 2.
Vérifier le résultat à la calculatrice.

4. Equation de la tangente

Soit f une fonction définie sur I un intervalle. Soit A un point de la courbe d'abscisse a. Alors, l'équation de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



Démonstration

II. FONCTION DERIVEE

1. Dérivée des fonctions usuelles

On a appris à calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point précis, il est long et fastidieux de calculer le nombre dérivé en plusieurs points différents en appliquant la technique de la limite du taux d'accroissement. Il faut une technique plus générale qui permet de calculer directement le nombre dérivé en le point qu'on veut.

1. DERIVEE D'UNE FONCTION AFFINE

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = ax + b$. Ainsi on se propose dans la suite de calculer la fonction dérivée f' de la fonction f dans le cas général

Si $f(x) = ax + b$ alors $\boxed{f'(x) = a}$

x^2 $\quad 2x^{2-1}$

$2x^1 = 2x$

2. FONCTION PUISSANCE

Soit $f(x) = x^n$ alors on a :

x^n $\quad nx^{n-1}$ $\quad (x^3)' = 3x^2$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = nx^{n-1}$

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$\boxed{(x^3)' = 3x^2}$ $\quad f(x) = x^3$

$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

$(x^{-1})' = -1x^{-2}$

$= \dfrac{-1}{x^2}$.

Exemple :

On donne $f(x) = x^{10}$ alors $f'(x) = 10x^9$

Démontrons que si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}} = 3x^2$$

Remarque

La démonstration est admise en première et sera démontrée en terminale.

3. FONCTION INVERSE

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Démonstration

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$\dfrac{x}{(x+h)x} - \dfrac{x+h}{x(x+h)}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{x - (x+h)}{(x+h) \times x}\right.}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\cancel{x} - \cancel{x} - h}{(x+h) \times x}}{h}$$

On veut montrer que : $(x^3)' = 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On calcule : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. , $\boxed{f(x) = x^3.}$

$$\begin{cases} f(x+h) = \dots\dots \\ f(x) = \dots \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccl} 1 & & & & \leftarrow (a+b)^0 \\ 1 & 1 & & & \leftarrow (a+b)^1 \\ 1 & 2 & 1 & & \leftarrow (a+b)^2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \leftarrow (a+b)^3 \end{array}$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3.$$

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

$$f(x) = x^3.$$

$$\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h}.$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + \overset{\to 0}{3xh} + \overset{\to 0}{h^2}.$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2.}$$

2) On veut montrer que : $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

On calcule : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

$$\begin{cases} f(x+h) = \frac{1}{x+h}. \\ f(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Application : Calculer les dérivées suivantes :

1) $f(x) = 3x + 9$. $\quad f'(x) = 3$

2) $g(x) = -4x + 12 \quad g'(x) = -4$

3) $h(x) = -\frac{1}{2}x + 3x + 2 \quad h'(x) = \frac{-1}{2} + 3$

$$= +\frac{5}{2}.$$

$ax + b \rightarrow a$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)\times x}}{h}$$

$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{(x+h)\times x} \times \frac{1}{\cancel{h}}$$

$\frac{-\cancel{h}}{(x+h)\,x} \times \frac{1}{\cancel{h}}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h)\times x} = -\frac{1}{x^2}$$

$\frac{-1}{x^2 + \underbrace{hx}_{\to 0}}$

4. FONCTION RACINE CARREE

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^{1/2}}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration

$\sqrt[3]{x} = (x^{\frac{1}{3}})$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\sqrt{x+h} - \sqrt{x} \to \sqrt{x+h} + \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right) \times \left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h \times \left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$a^2 - b^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}^2 - \sqrt{x}^2\right)}{h \times \left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h \times \left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h} \times 1}{\cancel{h} \times \left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+\underbrace{h}_{\to 0}} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\sqrt{x}$

2. Opérations sur les fonctions dérivées

Dans toute cette partie $u(x)$ et $v(x)$ désignent deux fonctions différentes et $v(x)$ ne s'annule pas.

1. DERIVEE D'UNE SOMME

$f(x) = 3x + 2x = 5x$

Si $f(x) = u(x) + v(x)$ alors $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

$f'(x) = (3x)' + (2x)'$

$= 3 + 2$

$= 5$

$f(x) = 3x^2 + 2x$

$f'(x) = (3x^2)' + (2x)'$

Trouver $f'(x)$.

Exemple

Soit $f(x) = x^3 + x^2$ alors $f\ (x) = \underbrace{3x^2}_{a\,u(x)} + 2x \quad$ ($a\,u'(x)$.) $\longrightarrow f'(x) = 3\times 2x + 2 = 6x+2$

$f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$.

2. DERIVEE PAR LE PRODUIT D'UN REEL

> **Si $f(x) = k \times u(x)$ alors $f'(x) = k \times u'(x)$ où k est un réel**

Exemple

On donne la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{4}{x} = 4 \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 4 \times \frac{-1}{x^2} = -\frac{4}{x^2}$$

$\frac{4}{x} = \underbrace{4 \times \frac{1}{x}}$

$\underbrace{4 \times \left(\frac{1}{x}\right)'}$

$4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$-\frac{4}{x^2}$

3. DERIVEE D'UN PRODUIT

> **Si $f(x) = u(x) \times v(x)$ alors $f'(x) = u'(x) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) + v'(x) \times \mathbf{u}(\mathbf{x})$**

Exemple

$f(x) = u(x) + v(x)$

$f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

On considère la fonction suivante :

$$f(x) = \overbrace{(2x+3)}^{u(x)}\overbrace{(x^2+2x-1)}^{v(x)}$$

$f'(x) = \underline{u'(x)}v(x) + \underline{v'(x)}u(x)$.

$f(x) = u(x) \times v(x)$.

ici $u(x) = 2x + 3$ alors $u'(x) = 2$

De plus $v(x) = x^2 + 2x - 1$ alors $v'(x) = 2x + 2$

$(u(x) \times v(x))' = u'(x) \times v(x) + v'(x)\, u(x)$.

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$$

$$f'(x) = 2(x^2 + 2x - 1) + (2x + 2)(2x + 3)$$

$\underbrace{\sqrt{3}\,x}_{v(x)} \times \underbrace{3x^2}_{v(x)}$.

$$f'(x) = 2x^2 + 4x - 2 + 4x^2 + 10x + 6$$

$$f'(x) = 6x^2 + 14x + 4$$

$f'(x) = u'(x) \times v'(x)$.

4. DERIVATION D'UN QUOTIENT

> **Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)\times \mathbf{v}(\mathbf{x}) - v'(x) \times \mathbf{u}(\mathbf{x})}{v^2(x)}$**

$$f(x) = \underbrace{(2x+3)}_{u(x)}\underbrace{(x^2+2x-1)}_{v(x)}$$

$$\begin{cases} u(x) = 2x+3 \\ u'(x) = 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = u'v + uv'$$

$$\begin{cases} v(x) = x^2+2x-1. \\ v'(x) = 2x+2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times (x^2+2x-1) + (2x+3)(2x+2). \\ &= 2x^2+4x-2 + (4x^2+4x+6x+6) \\ &= 2x^2+4x-2+4x^2+10x+6. \\ &= 6x^2+14x+4. \\ &= 2(3x^2+7x+2). \end{aligned}$$

$$g(x) = (3x^3+2)(\sqrt{x}+1).$$

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$; déterminer la fonction dérivée de f après avoir donné son ensemble de définition.

On pose $u(x) = 2x + 3$ alors $u'(x) = 2$
De même $v(x) = x^2 + 1$ alors $v'(x) = 2x$

On obtient alors :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v^2(x)}$$
$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x+3)}{(x^2+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 - 6x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 6x + 2}{(x^2+1)^2}$$

3. Tableau récapitulatif

Fonction	$\mathscr{D}_f$	Dérivée	$\mathscr{D}'_f$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

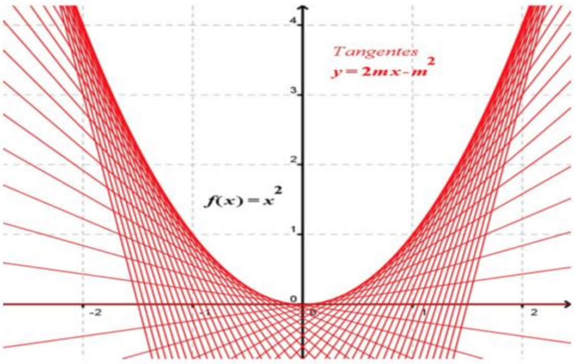
Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée d'une fonction composée	$(g \circ u)' = u' \times g' \circ u$

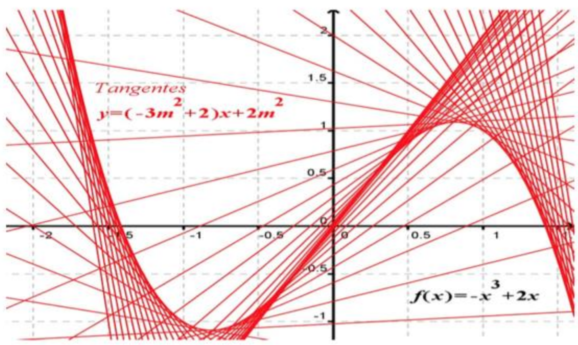
III. RELATION ENTRE FONCTION DERIVEE ET FONCTION

Théorème fondamental

Si $f'(x) = 0$ alors la fonctionc f est constante.
Si $f'(x) > 0$ alors la fonctionc f est strictement croissante.
Si $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante.

Illustration


Tangentes
y = 2mx - m^2
f(x) = x^2


Tangentes
y=(-3m^2+2)x+2m^2
f(x)=-x^3+2x