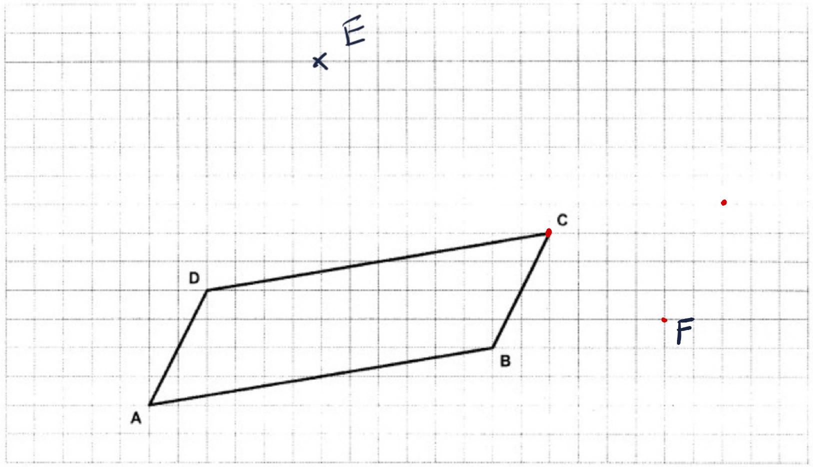
Exercice 5 corrigé disponible

Sur le dessin ci-dessous, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



1. Placer les points E et F tels que $\overrightarrow{EA} = -3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Les points E, C et F sont-ils alignés ?

1) OK $\quad \overrightarrow{EA} = -3\overrightarrow{AD}$.

2) On a : $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{EC} = -3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{EC} = -3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{EC} = -3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

$\boxed{\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}}$

3) $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$.

$2 \times \overrightarrow{CF} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$.

$2\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$.

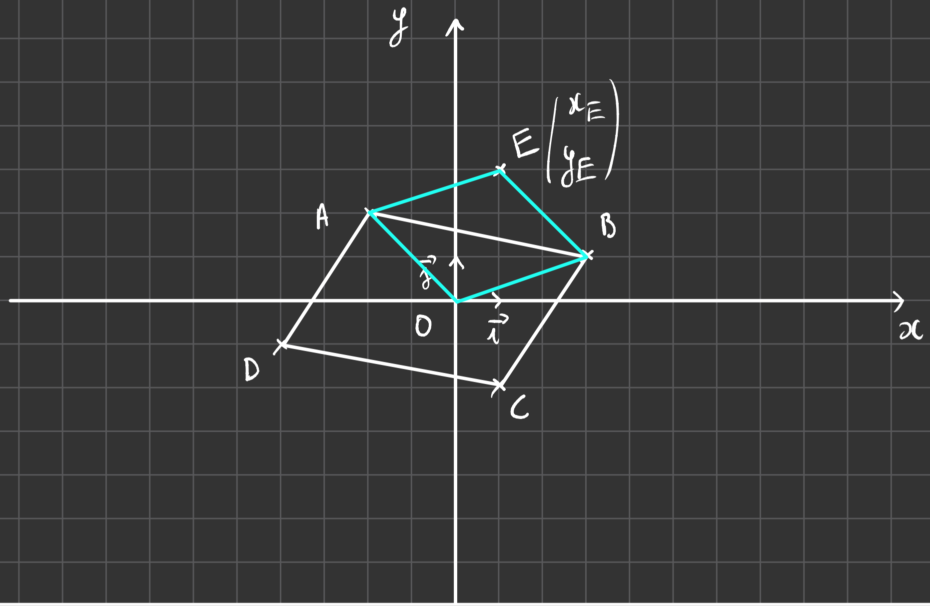
$\boxed{2\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EC}}$

Les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires donc les points C, F et E sont alignés.

Exercice 7 corrigé disponible

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (*unités graphiques 1 cm sur chaque axe*)

1. a) Placer les points $A(-2;2)$, $B(3;1)$, $C(1;-2)$ et $D(-4;-1)$.
   b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$
2. Calculer les coordonnées du point E tel que $OAEB$ soit un parallélogramme.



b) $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \vec{AB}\begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \vec{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \vec{DC}\begin{pmatrix} 1-(-4) \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \vec{DC}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\vec{AB} = \vec{DC}$, donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2. OAEB est un parallélogramme ssi

$\vec{OA} = \vec{BE}$

$O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où : $\vec{OA}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix}$ d'où : $\vec{BE}\begin{pmatrix} x_E - 3 \\ y_E - 1 \end{pmatrix}$.

D'où : $\begin{cases} x_E - 3 = -2 \\ y_E - 1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_E = 1 \\ y_E = 3 \end{cases}$

Ainsi : $E\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 9 **corrigé disponible**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(-1;2)$, $B(1;-3)$ et $C(4,4)$.

8. Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont :

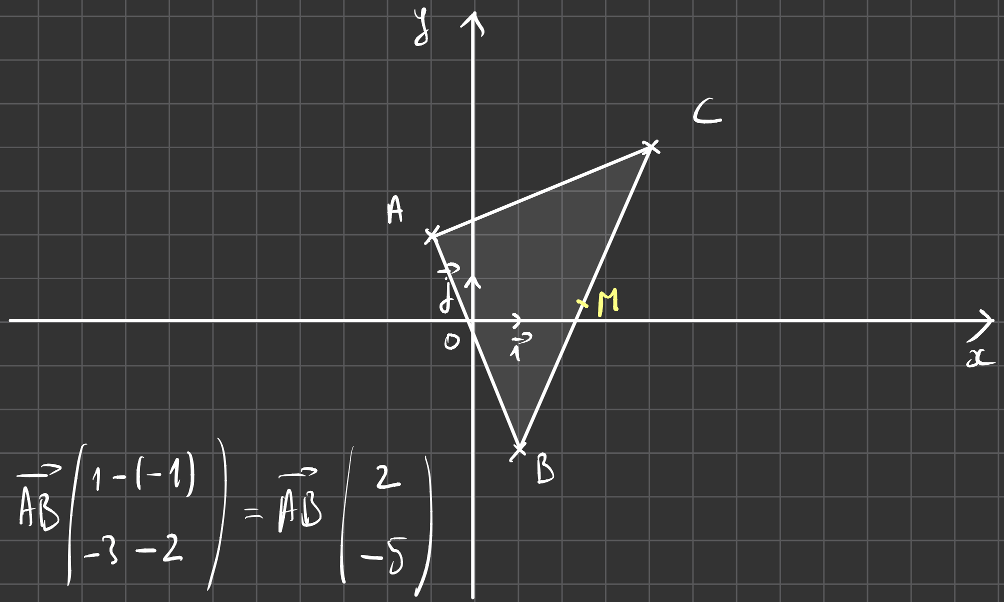
a) $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

9. Le triangle ABC est :

a) rectangle en A **b)** équilatéral **c)** quelconque

10. M est le milieu du segment $[BC]$:

a) $\cancel{\vec{MB} = \vec{MC}}$ **b)** $MA = MB$ **c)** $M\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$



1) $\vec{AB}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ -3-2 \end{pmatrix} = \vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

2) $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$

$BC^2 = (4-1)^2 + (4-(-3))^2$

$BC^2 = 9 + 49 = 58.$

$AB^2 = (1-(-1))^2 + (-3-2)^2$

$A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$AB^2 = 4 + 25 = 29.$

$C\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$

$AC^2 = (4-(-1))^2 + (4-2)^2$

$AC^2 = 25 + 4 = 29.$

$AC^2 + AB^2 = 29 + 29 = 58 = BC^2.$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

M est le milieu de [BC] : $M = m[BC]$.

$$M\begin{pmatrix} \frac{x_B + x_C}{2} \\ \frac{y_B + y_C}{2} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \frac{1+4}{2} \\ \frac{-3+4}{2} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 14 corrigé disponible

On se place dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soient les points $A(-\frac{7}{2} ; 2)$, $B(-2 ; 5)$, $C(5 ; \frac{13}{2})$, $D(3 ; \frac{5}{2})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. En déduire que le quadrilatère ABCD est un trapèze.
3. On définit le point I par l'égalité : $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID}$.

   Montrer que les coordonnées de I sont $(-23 ; \frac{1}{2})$.
4. Les points I, B et C sont-ils alignés ?
5. J et K étant les milieux respectifs de [AB] et [CD], déterminer les coordonnées de J et K.

   Démontrer alors que les points I, J et K sont alignés.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$

2) $\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) = -4 \times \frac{3}{2} - 3 \times (-2).$

$= -6 + 6 = 0.$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, ainsi, $(AB)//(CD)$, le quadrilatère ABDC est donc un trapèze.

3) $I\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} - x_I \\ 2 - y_I \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} 3 - x_I \\ \frac{5}{2} - y_I \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{4}\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} \frac{3}{4}(3 - x_I) \\ \frac{3}{4}\left(\frac{5}{2} - y_I\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{7}{2} - x_I = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}x_I \\ 2 - y_I = \frac{15}{8} - \frac{3}{4}y_I \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_I + \frac{3}{4}x_I = \frac{9}{4} + \frac{7}{2} \\ -y_I + \frac{3}{4}y_I = \frac{15}{8} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}x_I = \frac{23}{4} \\ -\frac{1}{4}y_I = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_I = -23 \\ y_I = -\frac{1}{8} \times (-4) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

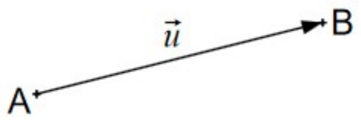
Les vecteurs du plan – Fiche de cours

1. Les vecteurs du plan

a. Définition

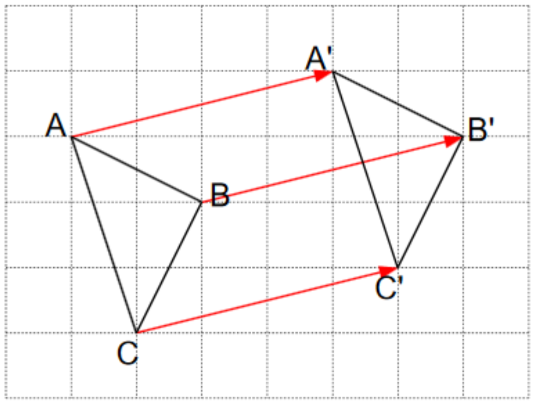
Un vecteur est un objet géométrique défini par :

- Une direction
- Un sens
- Une norme



b. Notion de translation

Une translation est une transformation du plan qui réalise le glissement de tous les points du plan selon un même déplacement



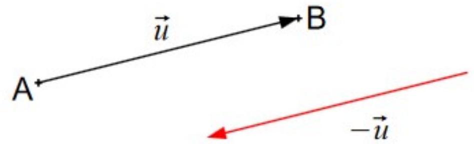
Ce déplacement peut être caractérisé par un vecteur :

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$$

c. Opposé d'un vecteur

L'opposé d'un vecteur est caractérisé comme la translation en sens inverse de ce vecteur

$\overrightarrow{AB}$ $\quad\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

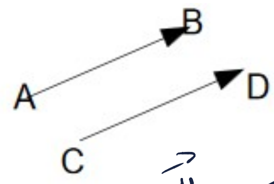


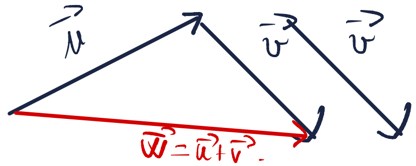
d. Egalité de vecteurs

$-\overrightarrow{BA}$
$= \overrightarrow{AB}$.

2 vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont :

- même direction
- même sens
- même norme





2. Somme vectorielle

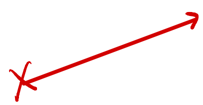
a. Définition

La somme de 2 vecteurs est une opération algébrique égale à un vecteur :

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$$

b. Propriétés algébriques

- commutativité : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- élément neutre : $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
- opposé : $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

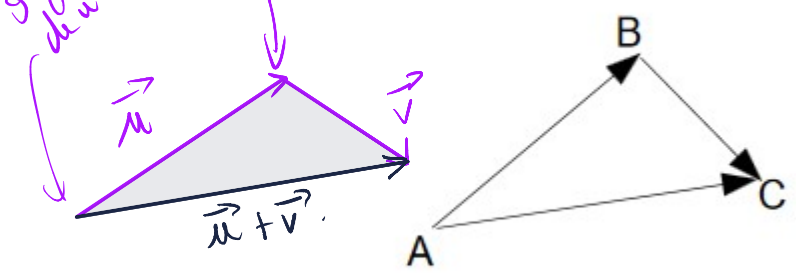


c. Propriété géométrique

La relation « dite de Chasles » utilise la somme vectorielle

extrémité de $\vec{u}$

origine de $\vec{u}$



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}=$

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$

3. Multiplication par un réel non nul

a. Définition

Multiplier un vecteur par un réel k non nul est :

- un vecteur de même sens si k>0
- un vecteur de sens opposé si k<0

$\vec{u}=\sqrt{2}\times\vec{v}$

$\vec{u}=3\vec{v}$

b. Vecteurs colinéaires

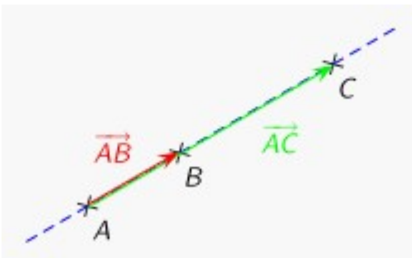
Lorsque $\vec{v}=k\vec{u}$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

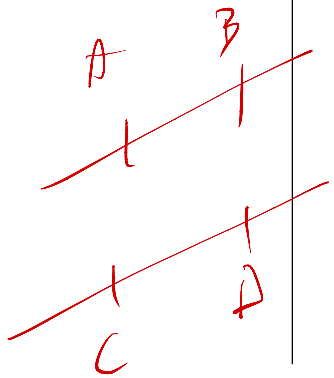
$\vec{u}=-3\vec{v}$

c. Alignement de 3 points

Soient 3 points du plan A, B, C

$$\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow A,B,C\ alignés$$





(AB) // (CD)

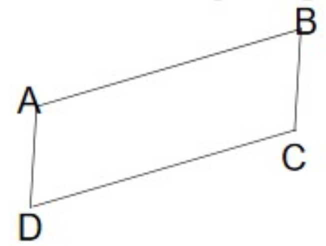
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

$\vec{u}=k\times\vec{v}$

4. Autres propriétés

a. Vecteurs et parallélogramme

Soient 4 points du plan A, B, C et D :

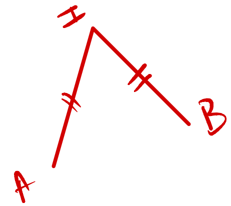


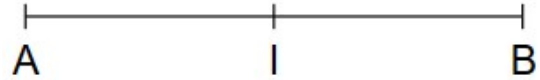
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow ABCD\ parallélogramme$$

b. Milieu

AI = IB

Soient 3 points du plan A, B et I milieu de [AB]

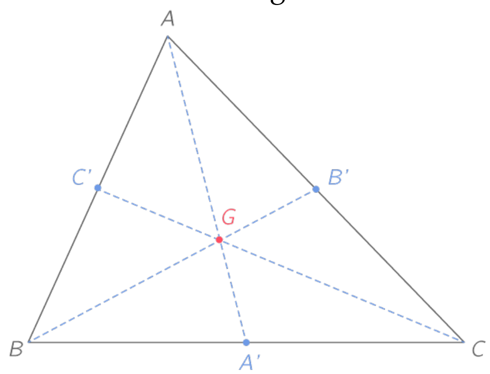




$$I\ milieu\ de\ AB\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

c. Centre de gravité

Soit le triangle ABC et G le centre de gravité



$$G\ centre\ de\ gravité\ de\ ABC\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'A}$$

4. Vecteurs et coordonnées

a. Coordonnées d'un vecteur

Soient 2 points du plan A $(x_A\ ;y_A)$ et B $(B\ ;y_B)$

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$$

b. Egalité de vecteurs

Soient les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)\,et\,\vec{v}(x'\,;y')$ du plan

$$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x=x' \\ y=y' \end{pmatrix}$$

c. Opérations algébriques

- somme

Soient les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)\,et\,\vec{v}(x'\,;y')$ du plan

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$

- multiplication par un réel

Soient le vecteur $\vec{u}(x\,;y)$ et k réel non nul

$$\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

d. Déterminant de 2 vecteurs

Soient les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)\,et\,\vec{v}(x'\,;y')$ du plan

On définit $|\vec{u}\,;\vec{v}|=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y$

$$|\vec{u}\,;\vec{u}|=0 \quad |\vec{u}\,;\vec{v}|=|\vec{v}\,;\vec{u}|$$

e. Critère de colinéarité

Soient les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ du plan $\vec{u},\vec{v}\,colinéaires\Leftrightarrow|\vec{u}\,;\vec{v}|=0$

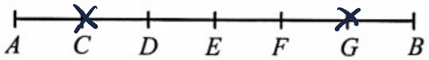
$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$|\vec{u}\,;\vec{v}|=2\times4-3\times(-1)$

Les vecteurs du plan – Exercices - Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Le segment $[AB]$ est divisé en 6 parties de même longueur.



Compléter les relations suivantes par :

- la lettre qui convient :

1) $\overrightarrow{EC} = -2\ \overrightarrow{EF}$

2) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$

3) $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{AF}$

- le nombre qui convient :

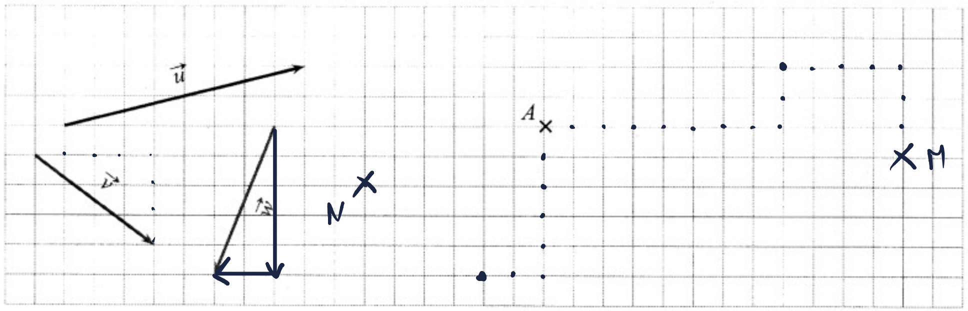
4) $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{AB}$

5) $\overrightarrow{AD} = \ldots\ \overrightarrow{BF}$

6) $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\ \overrightarrow{BF}$

Exercice 2 corrigé disponible

Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AN} = \vec{w} - \vec{v}$



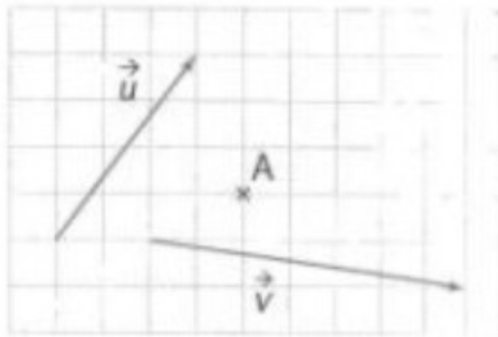
Exercice 3 corrigé disponible

1. Reproduire la figure. Construire les points B, C et D tels que :

$\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$;

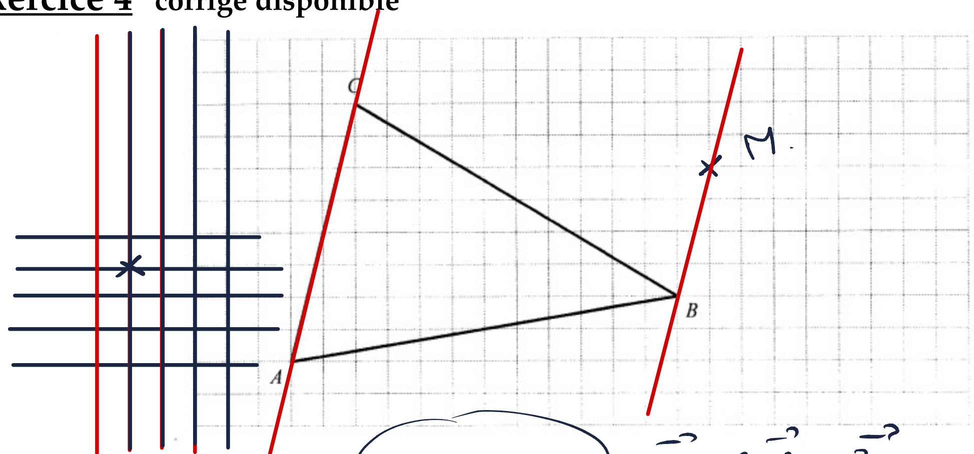
$\overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v}$;

$\overrightarrow{AD} = 2\vec{u}$.



2. Que peut-on dire du quadrilatère ABDC ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 corrigé disponible



1. Construire le point M défini par $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC}$
2. Les droites (BM) et (AC) sont-elles parallèles ?

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{MA} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

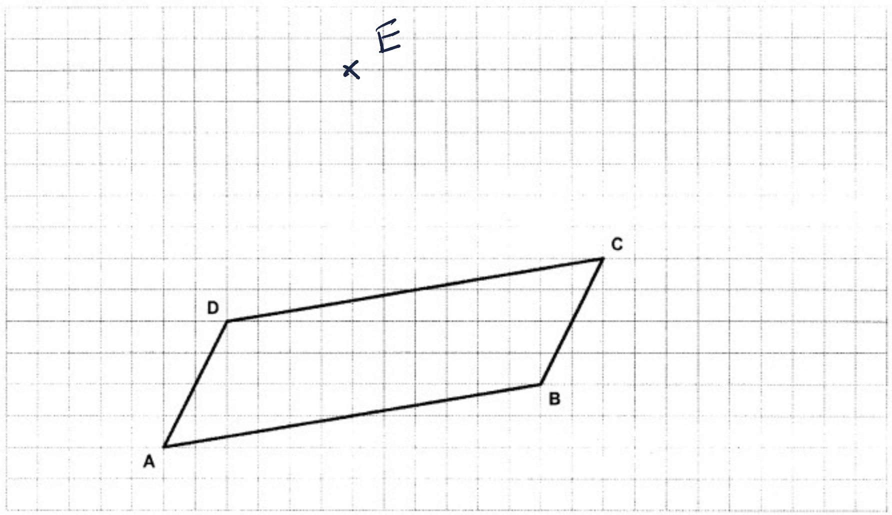
$-2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AB}$

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 5 **corrigé disponible**

Sur le dessin ci-dessous, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



1. Placer les points E et F tels que $\overrightarrow{EA} = -3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Les points E, C et F sont-ils alignés ?

Exercice 6 **corrigé disponible**

$ABCD$ est un parallélogramme.

1) Construire les points E et F définis par : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{DA}$.

2) Montrer que $\overrightarrow{FE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}$ et que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

3) En déduire que E, F et C sont alignés.

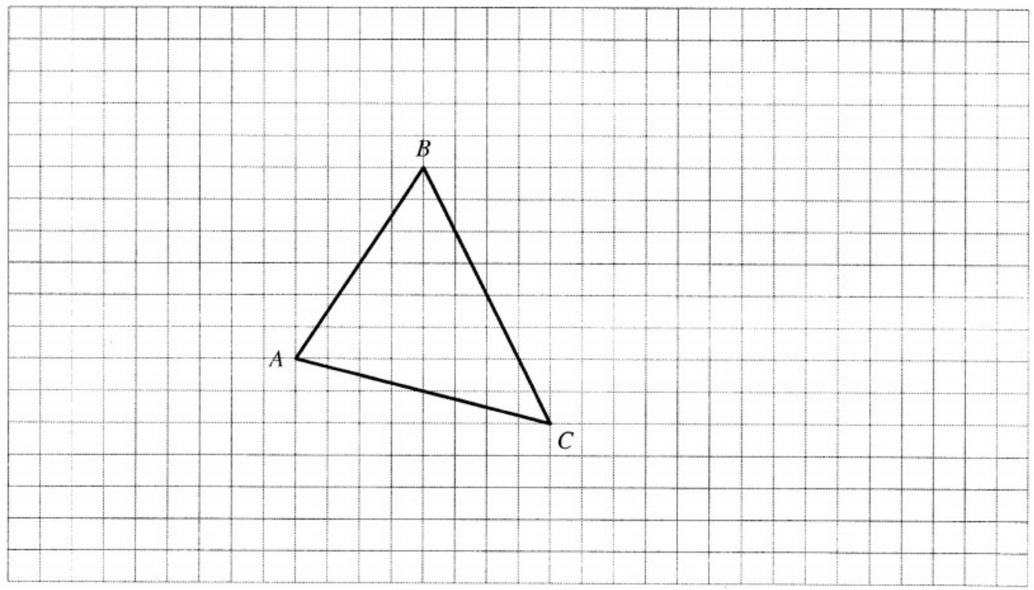
Exercice 7 **corrigé disponible**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (*unités graphiques 1 cm sur chaque axe*)

1. a) Placer les points $A(-2;2)$, $B(3;1)$, $C(1;-2)$ et $D(-4;-1)$.
   b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$
2. Calculer les coordonnées du point E tel que $OAEB$ soit un parallélogramme.

Exercice 8 **corrigé disponible**

ABC est un triangle.



1. Placer le point M défini par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2. Soit N le point défini par $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CB}$.
   a) Montrer que $\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
   b) Placer le point N.
3. Les points B, M et N sont-ils alignés ?

Exercice 9 corrigé disponible

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(-1;2)$, $B(1;-3)$ et $C(4,4)$.

8. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ **c)** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

9. Le triangle ABC est :

a) rectangle en A **b)** équilatéral **c)** quelconque

10. M est le milieu du segment $[BC]$:

a) $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$ **b)** $MA=MB$ **c)** $M\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$

Exercice 10 corrigé disponible

Le plan est muni d'un repère orthonormé (*unités graphiques 1 cm sur chaque axe*)

1. Dans le repère ci-dessous, placer les points $A(-4;-3)$, $B(-1;3)$ et $C(3;1)$.
2. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme puis, placer D sur la figure.
3. Calculer les coordonnées du centre I du parallélogramme $ABCD$.
4. Soit M le point défini par

$$6\overrightarrow{BM}=4\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{CB}$$

   a) Démontrer que $\overrightarrow{BM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

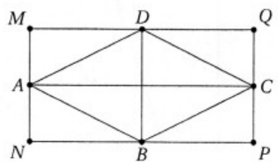
   b) Construire le point M sur la figure (*on laissera apparents les traits de construction*).

   c) Calculer les coordonnées de M.
5. Les points D, I et M sont-ils alignés ? Justifier la réponse.

Exercice 11 corrigé disponible

On considère le rectangle $MNPQ$ ci-contre. On désigne par A,B,C,D les milieux respectifs de $[MN]$, $[NQ]$, $[PQ]$, $[QM]$. Compléter les égalités suivantes en utilisant les points de la figure.

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$
2. $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BP}=$
3. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=$
4. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=$
5. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{DC}=$
6. $\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{BA}=$
7. $2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{CD}=$

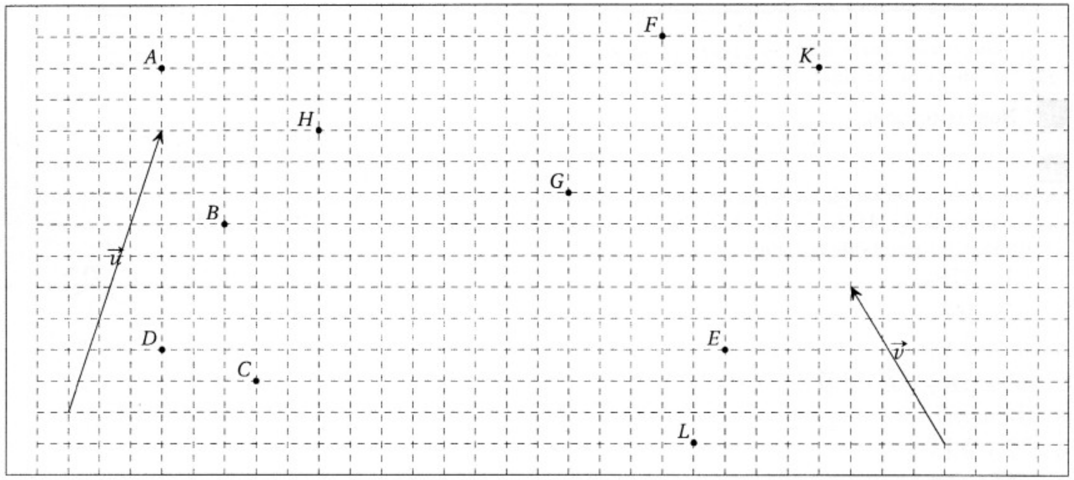


Exercice 12 corrigé disponible

Soit A, B, C et D quatre points du plan. Répondre par vrai ou faux aux propositions suivantes :

	Vrai	Faux
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction.	❑	❑
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même sens.	❑	❑
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même norme.	❑	❑
$\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AB}$ ont même direction.	❑	❑
$\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AB}$ ont même sens.	❑	❑
$\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AB}$ ont même longueur.	❑	❑
Si $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ alors C est le milieu de $[AB]$.	❑	❑
Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ alors $ABCD$ est un parallélogramme.	❑	❑

Exercice 13 corrigé disponible



Compléter la figure suivante (en faisant apparaître les traits de construction) :

1. Construire le point A' tel que $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
2. Construire le point P tel que $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}$.
3. Construire le point U tel que $\overrightarrow{KU}=\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{LE}$.
4. Construire le point N tel que $\overrightarrow{FN}=-\frac{1}{3}\vec{u}$
5. Construire le point M tel que $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\vec{u}-2\vec{v}$

Exercice 14 **corrigé disponible**

On se place dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Soient les points A($-\frac{7}{2}$; 2), B(-2 ; 5), C(5 ; $\frac{13}{2}$), D(3 ; $\frac{5}{2}$).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2. En déduire que le quadrilatère ABCD est un trapèze.

3. On définit le point I par l'égalité : $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID}$.

Montrer que les coordonnées de I sont (-23 ; $\frac{1}{2}$).

4. Les points I, B et C sont-ils alignés ?

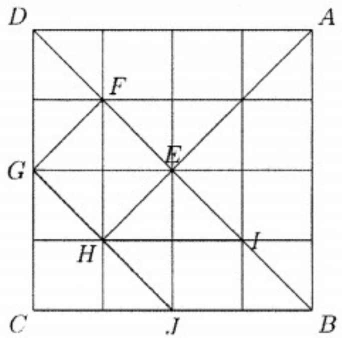
5. J et K étant les milieux respectifs de [AB] et [CD], déterminer les coordonnées de J et K.

Démontrer alors que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 15

Compléter l'enoncé si-dessous :

1. $\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{E\ldots}$
2. $\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{J\ldots}$
3. $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI} =$
4. $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BH} =$
5. $\overrightarrow{EI} - \overrightarrow{GF} =$
6. $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{JF} =$
7. $\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{IF} - \overrightarrow{GE} =$



Exercice 16

On donne $A(2;-2)$, $B(-1;4)$, $C(4;-3)$.

1. Déterminer les coordonnées de M tel que
$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$
2. Déterminer les coordonnées de I milieu de $[AB]$.

Exercice 17

Montrer que pour tout point A,B,C,D,E du plan :

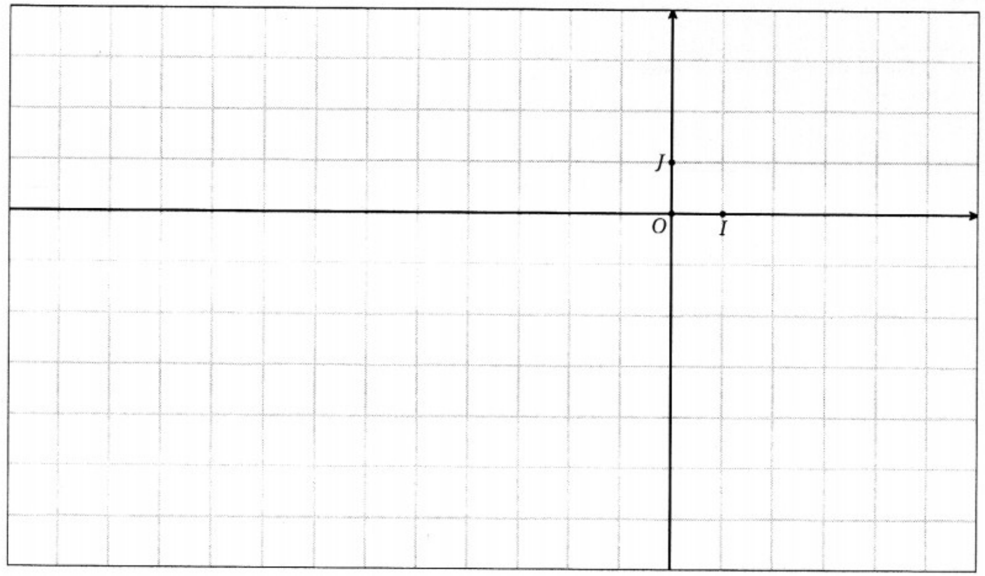
$$\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CE}$$

Exercice 18

Dans un repère $(O; I; J)$, on considère les points suivants :

$A(3;0)$ $B(-3;-1)$ $C(-1;2)$ $K(-6;-2)$

1. Placer les points dans le repère. On complétera la figure au fur et à mesure des questions.
2. Calculer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Calculer les coordonnées de I, centre du parallélogramme $ABCD$.
4. Soit M un point de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de M pour que B,C,M soient alignés.



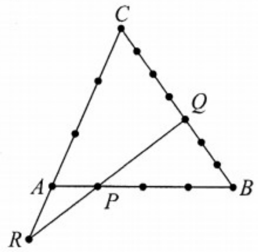
Exercice 19

Dans un repère orthogonal on donne les points $A(-3;1)$, $B(1;3)$, $C(1;-4)$, $B(7;-1)$.
Les droites suivantes sont-elle parallèlles ?

1. (AB) et (CD).
2. (AC) et (BD).

Exercice 20

On considère le triangle ABC. P est un point de (AB), Q un point de (BC) et R un point de (AC), disposés comme sur le dessin. (Les graduations sur les droites sont régulières.)



1. Donner les valeurs des réels α, β et γ tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AR} = \beta\overrightarrow{AC}, \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BQ} = \gamma\overrightarrow{BC}.$$

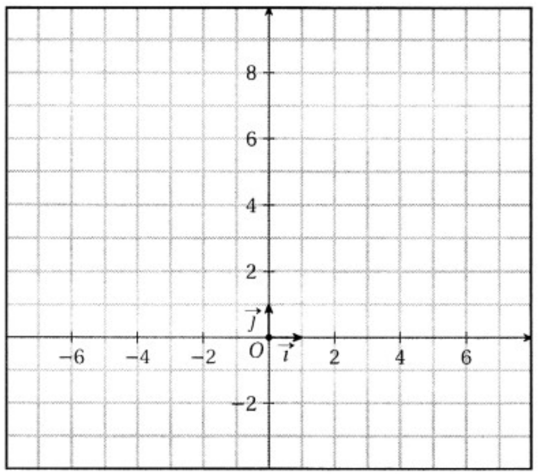
2. On se place dans le repère $(A; B,C)$. Déterminer les coordonnées des points A,B,C,P,R.
3. a) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   b) En déduire que $Q\left(\frac{4}{7}; \frac{3}{7}\right)$
4. Montrer que les points $P; R$ et Q sont alignés.

Exercice 21

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Soient $A(-5; 2)$, $B(2; 7)$, $C(-2; -1)$.
Vous compléterez la figure ci-jointe au cours de l'exercice.

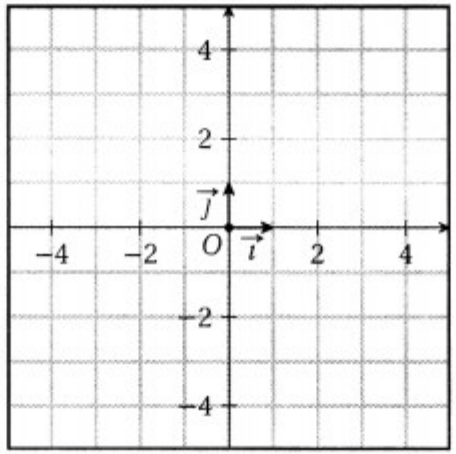
1. Déterminer les coordonnées du point I milieu de $[BC]$.
2. Soit D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Déterminer les coordonnées de D.
3. Déterminer les coordonnées de E tel que $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}$.
4. Soit $H(-3; 0)$. Montrer que les points E,I et H sont alignés.



Exercice 22

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Placer les points $A(-2; 2)$, $B(1; 0)$, $C(-1; -3)$ et $D(-4; -1)$.
2. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Montrer qu'il s'agit d'un carré.



Exercice 23

Soit ABC un triangle quelconque. A′ le milieu de [BC], G le centre de gravité du triangle, D et E les points tels que $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

On note I le milieu de [DE].

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b. Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

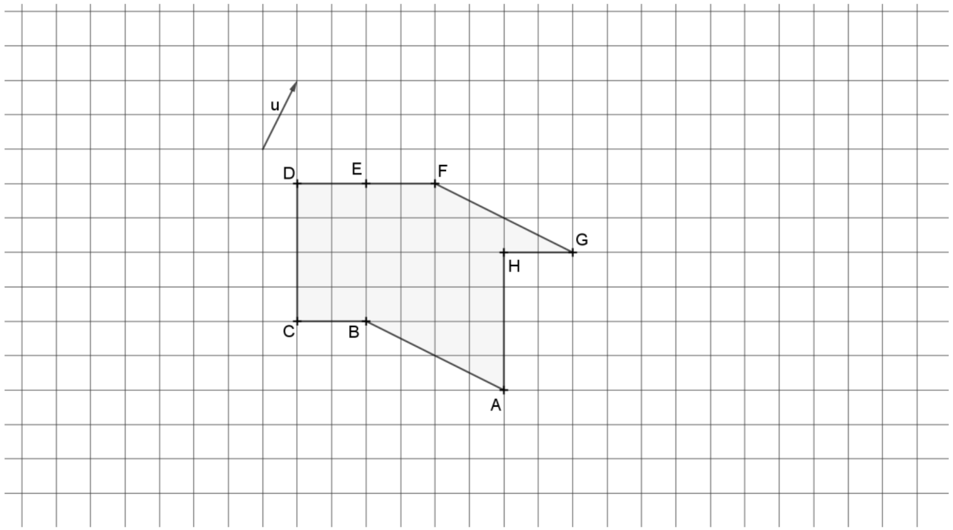
c. Démontrer que les points A, A′ et I sont alignés.

2. Démontrer que le point G est le milieu de [AI].

3. Prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Exercice 24

1. On considère le motif représenté ci-dessous.



Compléter les phrases suivantes :

(a) L'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ est ………………

(b) Tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{DC}$ sont

(c) Dans la translation qui transforme E en C, l'image de G est…

2. Placer les points J, K et L sur la figure tels que :

(a) J est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{FB}$

(b) $\overrightarrow{EK}=-\vec{u}$ **(c)** $\overrightarrow{GL}=-\overrightarrow{EC}$

Exercice 25

Représenter un parallélogramme quelconque $MATH$.

1. Construire l'image E de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MT}$

2. Construire l'image F de T par la translation de vecteur $\overrightarrow{MH}$

3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{TA}$

(b) En déduire que T est le milieu de $[HE]$.

4. (a) Expliquer pourquoi $\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{TF}$

(b) En déduire que T est le milieu de $[AF]$.

5. Conclure sur la nature du quadrilatère $AEFH$.

Exercice 26

1) Simplifier les sommes suivantes et donner un représentant du résultat :

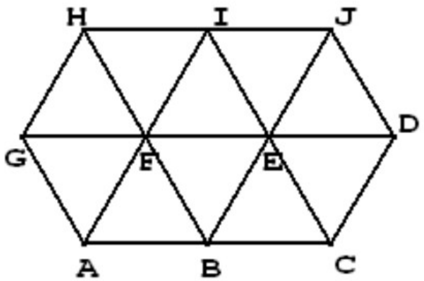
a. $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DE}$

b. $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{JD}$

c. $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{HF}$

d. $\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{BF}$

e. $\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{EJ}+\overrightarrow{HI}$



2) On note $\vec{\imath}=\overrightarrow{AF}$ et $\vec{\jmath}=\overrightarrow{FH}$.

Exprimer les vecteurs suivants à l'aide de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

<u>*Exemple*</u> : $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AF}=-\vec{\jmath}+\vec{\imath}$.

a. $\overrightarrow{BJ}$

b. $\overrightarrow{AC}$

c. $\overrightarrow{DI}$

d. $\overrightarrow{FJ}$

e. $\overrightarrow{AD}$

Exercice 27

Sur une feuille blanche, tracer un triangle ABC tel que $AB=6\ cm$, $BC=5\ cm$ et $AC=4\ cm$.

1) Placer le point D tel que $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$. Que peut-on dire du quadrilatère $ABDC$?

2) Construire le point E, image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

3) Construire le point F, image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.

4) Construire le point G, image du point B par l'enchainement des translations de vecteur $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{FC}$.

5) Construire le point H défini par l'égalité : $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

6) Construire le point I défini par l'égalité : $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

7) Nous allons maintenant démontrer quelques propriétés de la figure.

a. Grâce aux questions précédentes, donner deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{BD}$, un vecteur égal à $\overrightarrow{CB}$, une somme de vecteurs égale à $\overrightarrow{BG}$ et simplifier cette somme.

b. A l'aide des égalités précédentes, démontrer que :

- C est le milieu de $[AE]$
- $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{ED}$
- I est le milieu de $[ED]$

Exercice 28

On considère un triangle ABC.

1) Construire D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2) Construire I tel que C soit le milieu de $[AI]$.
3) Construire J tel que $ADIJ$ soit un parallélogramme.
4) Démontrer que C est le milieu de $[DJ]$.
5) Donner une égalité vectorielle correspondant à chacune des questions précédentes. Démontrer alors que $ABJC$ est un parallélogramme.

Exercice 29

Pour chaque ligne, répondre par Vrai ou Faux aux quatre affirmations correspondant aux données.

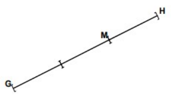
Attention : un réponse correcte rapporte 0,25 point mais une mauvaise réponse fait perdre 0,25 point.

Une absence de réponse ne fait rien perdre ni rien gagner. Le total de l'exercice sera ramené à 0 en cas de total négatif.

Données : $ABCD$ est un parallélogramme

I est le milieu de $[EF]$

M, G et H sont alignés et tels que :



	V ou F		V ou F		V ou F		V ou F
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$		$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$		$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$		$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$	
$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{EI}$		$\overrightarrow{IF} + \overrightarrow{EI} = \vec{0}$		$\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{IE}$		$\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{FI}$ sont opposés	
$\overrightarrow{MG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GH}$		$\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MH}$ ont la même direction		$\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{MH} = \vec{0}$		$2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} = \vec{0}$	

Exercice 30

ABC est un triangle. Sur la figure ci-jointe, laisser apparent les éventuels traits de construction.

1) Placer le point D, image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.
2) Placer le point E, image du point B par l'enchaînement des translations de vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3) Placer les points F et G tels que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$.
4) Placer les points H et I tels que $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BI} - 2\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{CI}$.
5) Montrer que H est le milieu de $[BC]$.

Exercice 31

On se place dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soient les points $A(-\frac{7}{2} ; 2)$, $B(-2 ; 5)$, $C(5 ; \frac{13}{2})$, $D(3 ; \frac{5}{2})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2. En déduire que le quadrilatère ABCD est un trapèze.

3. On définit le point I par l'égalité : $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID}$.

Montrer que les coordonnées de I sont $(-23 ; \frac{1}{2})$.

4. Les points I, B et C sont-ils alignés ?

5. J et K étant les milieux respectifs de [AB] et [CD], déterminer les coordonnées de J et K.

Démontrer alors que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 32

ABC est un triangle.

1. Placer les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

et F est le milieu de [AC].

2. Exprimer, en justifiant, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$.

3. **a)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AE}$.

c) Que peut-on alors conclure ?

4. **a)** Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

b) Placer le point G symétrique de F par rapport à C.

Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ puis que $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère AMDG.

Exercice 33

ABC est un triangle

1. Placer les points H et G vérifiant les relations suivantes :

$\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BG} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

2. On choisit le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

a) Donner les coordonnées des points A, B et C dans ce repère.

b) Déterminer les coordonnées des points H et G dans ce repère.

3. Les points A, G et H sont-ils alignés ?

Exercice 34

1. Écrire un algorithme en langage naturel qui teste si trois points $A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$ et $C(x_C\,;y_C)$ sont alignés.

2. Programmer cet algorithme avec Python.

Exercice 35

1. Construire un triangle ABC ainsi que les points B′ et D tels que $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$.

2. Montrer que les points D, B et B′ sont alignés.

Exercice 36

Soient $\vec{m}$ et $\vec{n}$ deux vecteurs du plan.

Les vecteurs $-12\vec{m}+4\vec{n}$ et $9\vec{m}-3\vec{n}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 37

On souhaite démontrer la proposition suivante : « Dans un repère orthonormé, les vecteurs non nuls $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul. »

1. On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Après avoir rappelé la définition de la colinéarité de deux vecteurs, démontrer que $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$.

2. On suppose maintenant que $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$.

a. On se place dans le cas où au moins un des quatre nombres x, x', y et y' est égal à 0. Démontrer que, dans ce cas, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b. On suppose maintenant que tous les nombres x, x', y et y' sont différents de 0. Démontrer que $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ et conclure.

Exercice 38

Dans chaque cas, déterminer le nombre réel a tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\25\end{pmatrix}$

2. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{-7}{12}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{-2}{7}\\a\end{pmatrix}$

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\\frac{-2}{3}\end{pmatrix}$

Exercice 39

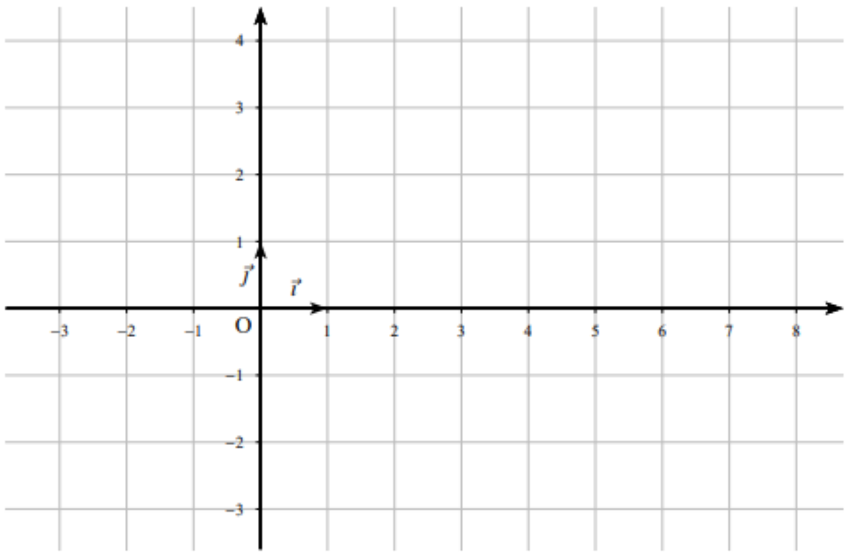
1) On donne les points A(−3; −2), B(5; 3) et C(13; 8).
   Les point A, B et C sont-ils alignés ?
2) On donne les points A(1; 5), B(−5; 20), C(−2; 7) et D(2; −3)
   Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercice 40

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points suivants :

A(3; −1) ; B(7; 4) et C(−3; 3)

1) Placer les points A, B et C sur l'annexe 2.
2) Calculer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3) Calculer les coordonnées du milieu I de [BC], du milieu J de [AC] et du milieu K de [AB].
4) Calculer les distances AB, AC, et BC.
5) Le triangle ABC est-il isocèle ? Si oui, en quel sommet ? (justifier la réponse)
6) Le triangle ABC est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ? (justifier la réponse)



Exercice 41

Dans un repère orthonormé, on donne les points suivants : A(2; 5), B(−4; −1), C(−5; 6) et I(−1; 2)

1) Montrer que les droites (AB) et (CI) ne sont pas parallèles.
2) Calculer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$. Que peut-on en déduire ?
3) Calculer les longueurs : AC et BC. En déduire que les droites (CI) et (AB) sont perpendiculaires.

Exercice 42

Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé du plan. $A(-1;1)$, $B(-2;-1)$, et $C(2;2)$.

1. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées de E symétrique de C par rapport à A.
3. Déterminer les coordonnées de F vérifiant

$$\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}$$

4. Les points E,B,F sont-ils alignés ?
5. Soit $K(2;y)$ tel que ABK rectangle en A.
   a) Placer K sur le graphique.
   b) Déterminer K par le calcul.