plus de bonnes notes

Dimanche 3 décembre 2023 – Dénombrement T6.

↳ compter.

Ensemble : $E = \{e_0 ; e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$. $e_2 \in E$

$\{e_1 ; e_2 ; e_3\} \subset E$.

$\text{card}(E) = n+1$.

Lancer de dé à 6 faces non pipé : Soit Ω_1 l'ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire.

$\text{Card}(\Omega_1) : 6$. $\Omega_1 = \{F_1 ; F_2 ; F_3 ; F_4 ; F_5 ; F_6\}$.

Lancer de pièce à faces non pipée : Soit Ω_2 l'univers de cette exp aléatoire.

$\text{Card}(\Omega_2) = 2$. $\Omega_2 = \{C_1 ; C_2\}$.

$C_1 ; C_2$

$C_1 ;$

C_2

$\emptyset$.

$E\{A ; B ; C\}$.

① A ④ $\{A ; B\}$ ⑦ $\{A ; B ; C\}$.

② B ⑤ $\{A ; C\}$. ⑧ $\{\emptyset\}$.

③ C ⑥ $\{B ; C\}$.

$x \in \mathbb{R}$

$(x ; y) \in \mathbb{R}^2$

$C_1 ; F_1$	$C_2 ; F_1$
$C_1 ; F_2$	$C_2 ; F_2$
$C_1 ; F_3$	$C_2 ; F_3$
$C_1 ; F_4$	$C_2 ; F_4$
$C_1 ; F_5$	$C_2 ; F_5$
$C_1 ; F_6$	$C_2 ; F_6$

$\Omega_1 = \{F_1 ; F_2 ; F_3 ; F_4 ; F_5 ; F_6\}$.

$\Omega_2 = \{C_1 ; C_2\}$.

$\{(F_1 ; C_1) ; (F_1 ; C_2) \dots\dots\} = \Omega_1 \times \Omega_2$.

$\text{Card}(\Omega_1 \times \Omega_2) = \text{card}(\Omega_1) \times \text{card}(\Omega_2)$.

$= 6 \times 2 = 12$.

$\Omega_1 = \{F_1 ; F_2 ; F_3 ; F_4 ; F_5 ; F_6\}$.

$P_1 = \{F_1 ; F_3\}$. $P_2 = \{F_1 ; F_2 ; F_3\}$.

plus de bonnes notes

Ordre : $(1;2) \neq (2;1)$.

Pas d'ordre : $(1;2) = (2;1)$.

Prof de sport : 22 élèves

1 Pina.
2 Pani
3 Pot
4 Althis
5 Jonathan

Jon
Alth
Pot
Pani
Pina

Ordre.

1) Pot
2) Pani
3) Alth
4) Pina
5) Jon

plus de bonnes notes

Pas ordre :

$$(1;2;3;4;5) = (5;4;3;2;1)$$

$\times$

$\div$

$2^3 =$

$2^5 =$ $\qquad 3^0 = 1$

$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n \qquad 0! = 1$

$2! = 1 \times 2 = 2$

$3! = 6$

$7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$

$= 120 \times 6 \times 7$

$= 720 \times 7$

$= \underline{\underline{5040}}$

$(e_3 \,;\, e_4)$

$(e_4 \,;\, e_3)$

$3 \times 4 \times 7$

1. $3 \times 4 \times 7$
2. $3 \times 7 \times 4$
3. $4 \times 3 \times 7$
4. $4 \times 7 \times 3$
5. $7 \times 3 \times 4$
6. $7 \times 4 \times 3$

plus de bonnes notes

Pari 1^{er}
Lina $2^{ème}$
Pat $3^{ème}$
Kilian

$$A_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1}$$

A_3^4

A_4^4

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

_ _ _ _

$n^k = 10^4 = 10\,000$

1 ; 2 . . . 22 .

$(12 ; 1 ; 2 ; 3) \} 4!$

$(21 ; 22 ; 12 ; 1) \} 4!$

32 Cartes

A_5^{32} $\binom{32}{5}$

Combinatoire et dénombrement – Fiche de cours

1. Cardinal d'ensembles

Soit A et B deux ensembles finis disjoints à a et b éléments

On note $Card(A)=a$ $Card(B)=b$ et $Card(A\cap B)=Card(\emptyset)=0$

2. Principes additif et multiplicatif

a. Principe additif

Soient une liste finie d'ensembles A_1, A_2, … A_n deux à deux disjoints et n un entier naturel

$$Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)$$

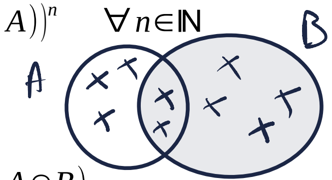
$$Card(A_1\cup A_2\cup \dots A_n)=Card(A_1)+Card(A_2)+\dots+Card(A_n)$$

b. Produit cartésien et principe multiplicatif

Produit cartésien :

Le produit cartésien de A et B noté $A\times B$ est l'ensemble des couples formés par les éléments de A et B $Card(A\times B)=a\cdot b$

Principe multiplicatif : $Card(A^n)=(Card(A))^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$



c. Autres formules

Soient 3 ensembles A, B, C non disjoints

$$Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cap B)$$

$$Card(A\cup B\cup C)=Card(A)+Card(B)+Card(C)-Card(A\cap B)$$
$$-Card(A\cap C)-Card(B\cap C)+Card(A\cap B\cap C)$$

3. Dénombrement

$(8)+(4)+(5)$
$-2-2-2+1$

a. Partie d'un ensemble

- Définition

  Une partie de E est un sous-ensemble composé d'éléments $\in E$ dont le nombre est compris entre 0 et n

- Nombre de parties

  Le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est 2^n

1234 4321

$E=\{e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4\}$

b. k-uplets et n-uplets

Soit E un ensemble à n éléments

- 1-uplet de E : un élément $\in E$
- 2-uplet de E (doublet / couple) : liste ordonnée de 2 éléments $\in E$
- 3-uplet de E (triplet) : liste ordonnée de 3 éléments $\in E$
- k-uplet de E : avec k<n, liste ordonnée de k éléments $\in E$
- n-uplet de E : liste ordonnée de n éléments $\in E$

2×3
3×2

c. Factorielle d'un entier naturel (nombre de permutations distinctes)

Soit n un entier naturel non nul ; on appelle factorielle n :

$$n!=1\times 2\times\dots\times n \quad \text{avec} \quad 0!=1$$

Une permutation d'un ensemble E à n éléments est un n-uplet distinct

Le nombre de permutations de E est $n!=1\times 2\times\dots\times n$

d. Combinaisons distinctes avec ordre

Le nombre d'arrangements ou k-uplets distincts est :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\forall k\in\mathbb{N}$ $0\le k\le n$

$$A_n^k=n\times(n-1)\times\dots(n-(k-1))=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Le nombre de combinaisons distinctes avec ordre de k éléments parmi n s'appelle nombre d'arrangements de k parmi n

e. Combinaisons distinctes sans ordre

Le nombre de combinaisons à k éléments de E :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\forall k\in\mathbb{N}$ $0\le k\le n$

$$\binom{n}{k}=C_n^k=\frac{A_n^k}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Le nombre de combinaisons distinctes sans ordre de k éléments parmi n s'appelle coefficient binomial de k parmi n

f. Autres formules

Nombre d'arrangements avec répétitions :

Le nombre d'arrangements à k éléments parmi n (k>n) est défini par : n^k

Nombre de combinaisons avec répétitions :

Le nombre de combinaisons à k répétitions parmi n éléments est défini par :

$$C_{n+k-1}^{k} \quad \text{avec} \quad k=\sum_{i=1}^{n} k_i$$

k_i nombre de répétitions du $i^{\text{ème}}$ élément

g. Propriétés des combinaisons

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n$$

$$\binom{0}{0}=1 \quad ; \quad \binom{n}{0}=1 \quad ; \quad \binom{n}{1}=n \quad ; \quad \binom{n}{n-1}=n \quad ; \quad \binom{n}{n}=1$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

h. Relation et triangle de Pascal

- Relation de Pascal

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n \quad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

- Triangle de Pascal

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Combinatoire et dénombrement – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Deux filles et trois garçons se prénomment Alice, Brigitte, Christophe, David et Eric. On écrit chaque prénom sur un carton et on place les cinq cartons dans une urne. On tire au hasard un premier carton de l'urne puis, sans le remettre, un deuxième carton. On obtient ainsi un couple de prénoms.

1.Déterminer le nombre de couples de prénoms qu'il est possible d'obtenir de cette manière.

2. Déterminer le nombre de 2-uplets: « obtenir deux prénoms féminins ».

On tire un troisième carton

3. Déterminer le nombre de 3-uplets : « obtenir deux prénoms masculins et un prénom féminin ».

Exercice 2 corrigé disponible

Une urne contient 7 boules, 5 noires et 2 rouges, indiscernables au toucher.
On extrait les 7 boules l'une après l'autre.
On appelle tirage la suite de 7 extractions de boules.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels la première boule tirée est rouge.
3. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels la première boule tirée est noire et la deuxième boule tire est rouge.
4. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels la première boule noire arrive en troisième position.

Exercice 3 corrigé disponible

On souhaite peindre un train de n wagons avec p couleurs ($p \leq n$) de telle sorte que deux wagons consécutifs n'aient pas la même couleur.
On note T(n,p) le nombre de possibilités.

1. Calculer T(n,2).
2. Combien a-t-on de couleurs possibles en fonction de p pour peindre le premier wagon sachant que le train n'est pas peint ?
3. Combien a-t-on de couleurs possibles pour peindre le deuxième wagon sachant que seul le premier wagon est peint ?
4. Combien a-t-on de couleurs possibles pour peindre le troisième wagon sachant que seuls les 2 premiers wagons sont peint ?
5. En itérant le raisonnement, combien a-t-on de couleurs possibles pour peindre le k-ième wagon sachant que seuls les k-1 premiers wagons sont peints ?
6. Calculer alors T(n,p).

Exercice 4 corrigé disponible

On dispose de trois crayons de couleurs (bleu, rose et vert) et on colorie les quatre éléments du modèle : le chapeau, le corsage, la jupe et les chaussures.

1. De combien de façons peut-on colorier cette figure ?
2. En admettant que toutes les combinaisons ont la même probabilité d'être tirées au sort, évaluer la probabilité qu'une figure tirée au hasard ait un corsage colorié en vert.

Exercice 5 corrigé disponible

Les 35 élèves d'une classe sont répartis en 4 catégories selon leur taille.
La catégorie 1 contient 7 élèves, la catégorie 2 en contient 5, la catégorie 3 en contient 9 et la catégorie 4 en contient 14.

1. Combien peut-on former de groupes de 7 élèves avec tous les élèves de la classe ?
2. Combien y a-t-il de groupes de 7 élèves formés par des élèves de catégorie 1 ? De catégorie 3 ?
3. Combien y a-t-il de groupes de 7 élèves contenant exactement 3 élèves de catégorie 1 et 2 élèves de catégorie 2 ?

Exercice 6 **corrigé disponible**

Une urne contient 8 boules blanches et 6 boules noires, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée.

1. On tire simultanément de l'urne 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   - 3 blanches et 2 noires ?
   - des boules de couleurs différentes ?
2. On tire successivement 5 boules avec remise de chaque boule tirée. Quelle est la probabilité d'avoir :
   - 3 boules blanches puis 2 noires ?

Exercice 7 **corrigé disponible**

Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 3 vertes. On tire quatre boules dans cette urne simultanément

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Déterminer le nombre de cas suivant :
   a. obtenir trois boules rouges.
   b. obtenir quatre boules de la même couleur.
   c. obtenir quatre boules de couleurs différentes.

Exercice 8 **corrigé disponible**

1. Démontrer par le calcul l'égalité suivante pour p et n entier positif avec $p \leq n-2$:

$$\binom{n}{p}=\binom{n-2}{p}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p-2}$$

2. Démontrer les égalités suivantes :

$$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p} \quad \text{et} \quad \binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$$

Exercice 9 **corrigé disponible**

Un sac contient 13 jetons indiscernables au toucher, 3 jetons noirs marqués A, B et C et 10 jetons blancs numérotés de 1 à 10. On extrait simultanément 5 jetons au hasard. On considère les 3 événements suivants :
R : « Obtenir les 3 jetons noirs parmi les 5 jetons extraits ».
S : « Obtenir le jeton marqué C parmi les 5 jetons extraits ».
T : « Obtenir au moins un jeton noir parmi les 5 jetons extraits ».
Calculer le nombre de cas de R, S et T

Exercice 10 **corrigé disponible**

On rappelle qu'une anagramme d'un mot est un autre mot qui contient les mêmes lettres. Par exemple REVISE et SERVIE sont des anagrammes. Une anagramme peut avoir un sens ou non.

1. Combien CHERS a-t-il d'anagrammes ? Combien CHERE a-t-il d'anagrammes ?
2. Combien CHERCHER a-t-il d'anagrammes ?
3. Combien RECHERCHER a-t-il d'anagrammes ?

Exercice 11 **corrigé disponible**

Une porte est munie d'un digicode dont le clavier porte les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C et D.
Un code est constitué de 3 chiffres et de 2 lettres (éventuellement identiques). Chacune des lettres est intercalée entre les chiffres (par exemple « 2C9A1 »).
Combien de codes peut-on constituer avec ces règles ?

Exercice 12 **corrigé disponible**

1. Deux équipes de hockeys de 12 et 15 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match : chaque joueur d'une équipe serre la main de chaque joueur de l'autre équipe. Combien de poignées de main ont été échangées ?
2. Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.
   a. Calculer le nombre d'éléments de A.
   b. Dénombrer les éléments de A :
      - composés de quatre chiffres distincts
      - composés d'au moins deux chiffres identiques
      - composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

Exercice 13 **corrigé disponible**

1. Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?
2. Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé Cent mille milliards de poèmes Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage
3. En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?
4. Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ? Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?

Exercice 14 **corrigé disponible**

1. A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr…) ?
2. Un groupe d'élèves de terminale constitue le bureau de l'association " Bal des Terms : le succès ". Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien y a-t-il de bureaux possibles ? (il y a 24 élèves dans la classe)
3. Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.
   a. Combien de résultats peut-on obtenir ?
   b. Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

Exercice 15 **corrigé disponible**

Calculer simplement $\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}$

Exercice 16 **corrigé disponible**

1. Les nombres 5, -1 et 3 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues. Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système
2. Au loto, il y a 49 numéros. Une grille de loto est composée de 6 de ces numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?
3. Christian et Claude font partie d'un club de 18 personnes. On doit former un groupe constitué de cinq d'entre elles pour représenter le club à un spectacle.
   a. Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer ?
   b. Dans combien de ces groupes peut figurer Christian ?
   c. Christian et Claude ne pouvant se supporter, combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer de telle façon que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble ?

Exercice 17

1. À l'aide du triangle de Pascal, lire $\binom{7}{4}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$ et $\binom{5}{4}$.
2. Démontrer que si $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-2$, alors on la relation suivante

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$$

Exercice 18

1) Interpréter $\binom{6}{1}$ et en donner la valeur.
2) On suppose connu que $\binom{6}{2} = 15$. En déduire $\binom{7}{2}$.
3) Comment obtenir facilement $\binom{7}{5}$?

Exercice 19

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) $\binom{12}{9} = \binom{12}{3}$
2) $\binom{8}{4} = 2\binom{7}{3}$
3) $\binom{9}{5} = 3\binom{8}{5}$

Exercice 20

Donner les valeurs sans calculatrice :

$$\binom{25}{0} \; ; \; \binom{23}{22} \; ; \; \binom{15}{15} \; ; \; \binom{2013}{1}$$

Exercice 21

Calculer avec la calculatrice :

$$\binom{52}{4} \;;\; \binom{24}{20} \;;\; \binom{13}{7} \;;\; \binom{2013}{2000}$$

Exercice 22

A l'aide du triangle de Pascal, démontrer que $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}=\binom{7}{3}$

Exercice 23

A l'aide du triangle de Pascal, donner les valeurs de

$$\binom{6}{2} \;;\; \binom{6}{3} \;;\binom{6}{4} \text{ et } \binom{6}{5}$$

Exercice 24

a) Combien y a-t-il de facons de réaliser des équipes de 3 à partir de 5 personnes?

b) On donne les valeurs suivantes :

$\binom{9}{2}$	$\binom{9}{3}$	$\binom{9}{4}$
36	84	126

A partir de ces valeurs et de vos connaissances sur les coefficients binomiaux, donner les valeurs de :

$$\binom{9}{0} \quad \binom{9}{5} \quad \binom{9}{6} \quad \text{et} \quad \binom{10}{5}$$

c) Dans une loterie, pour laquelle 25% des tickets sont gagnants, un enthousiaste achète 10 tickets. Il y a suffisamment de tickets disponibles pour qu'on puisse assimiler ceci à un tirage avec remise. On considère les événements suivants.

Exercice 25 corrigé disponible

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a. $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ **b.** $\dfrac{9}{8}$ **c.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ **d.** $\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a. 0 **b.** $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$ **c.** $\dfrac{23}{128}$ **d.** $\dfrac{1}{92}$

Exercice 26 corrigé disponible

1. Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher.

On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge?

$\boxed{A}$ $\dfrac{75}{512}$ $\boxed{B}$ $\dfrac{13}{56}$ $\boxed{C}$ $\dfrac{15}{64}$ $\boxed{D}$ $\dfrac{15}{28}$

Exercice 27 corrigé disponible

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité de tirer 3 boules noires est :

A. $\dfrac{1}{56}$ **B.** $\dfrac{1}{120}$ **C.** $\dfrac{1}{3}$

b. La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :

A. $\dfrac{11}{56}$ **B.** $\dfrac{11}{120}$ **C.** $\dfrac{16}{24}$

3. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :

- R_1 l'évènement : « La première boule tirée est rouge » ;
- N_1 l'évènement : « La première boule tirée est noire » ;
- R_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;
- N_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est noire ».

a. La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est :

A. $\dfrac{5}{8}$ **B.** $\dfrac{4}{7}$ **C.** $\dfrac{5}{14}$

b. La probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_2$ est :

A. $\dfrac{16}{49}$ **B.** $\dfrac{15}{64}$ **C.** $\dfrac{15}{56}$

c. La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

A. $\dfrac{5}{8}$ **B.** $\dfrac{5}{7}$ **C.** $\dfrac{3}{28}$

d. La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

A. $\dfrac{15}{56}$ **B.** $\dfrac{3}{8}$ **C.** $\dfrac{5}{7}$

Exercice 28 **corrigé disponible**

On a demandé à 200 personnes les langues étrangères qu'elles pratiquaient parmi anglais, espagnol et italien :

- soit A l'ensemble des personnes parlant l'anglais
- soit E l'ensemble des personnes parlant l'espagnol
- soit I l'ensemble des personnes parlant l'italien

De plus :

- 80 personnes pratiquent l'anglais
- 60 personnes pratiquent l'espagnol
- 60 personnes pratiquent l'italien
- 12 personnes pratiquent l'anglais et l'espagnol
- 15 personnes pratiquent l'anglais et l'italien
- 17 personnes pratiquent l'espagnol et l'italien
- 37 personnes ne parlent aucune langue étrangère

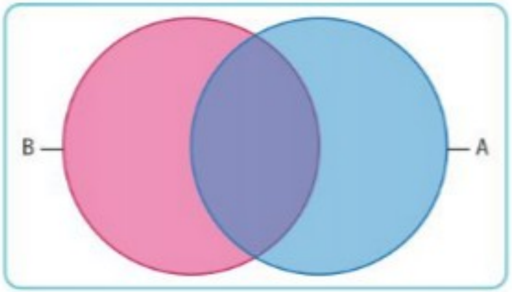
Combien de personnes pratiquent :

- 3 langues
- 2 langues
- 1 langue
- au moins une langue

Exercice 29

Soient A et B deux ensembles. On appelle **différence** de A et B l'ensemble, noté $A \setminus B$, des éléments de A qui ne sont pas dans B.

1. Recopier le diagramme suivant et y hachurer de trois couleurs différentes les zones représentant les ensembles $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $A \cap B$.



2. Justifier que ces trois ensembles sont disjoints.

3. Que vaut $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$?

4. En déduire la formule du crible :
$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

Exercice 30

4. Application 1 : On dispose de fleurs jaunes, roses, rouges et bleues et on souhaite faire un bouquet de dix fleurs. Combien de bouquets différents peut-on constituer ?

5. Application 2 : Combien de triplets $(x\,;y\,;z)$ d'entiers naturels tels que $x+y+z=50$ existe-t-il ?

Exercice 31

Dans un lot de 20 pièces fabriquées, 4 sont mauvaises. De combien de façon différentes peut-on en prélever 4 dans les cas suivants :

a. les 4 pièces sont bonnes
b. Une au moins d'entre elles est mauvaise.
c. Deux au moins sont mauvaises.

Exercice 32

Une classe de 30 élèves, 12 filles et 18 garçons, doit élire un comité composé d'un président, un vice-président et un secrétaire.

a. Combien de comités peut-on constituer ?

b. Combien de comités peut-on constituer sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une fille ?

c. Quel est le nombre de comités comprenant l'élève X ?

d. Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est un garçon et le secrétaire une fille ?

e. Quel est le nombre de comités pour lesquels le président et le vice-président sont de sexes différents ?

Exercice 33

Une assemblée de 15 hommes et 12 femmes désire élire un comité de 6 membres, madame A refuse de siéger dans tout comité dont ferait partie monsieur B.

a. Quel est le nombre de comités qui pourront être constitués dans ces conditions ?

b. Dénombrer ceux de ces comités dont madame A ferait partie.

Exercice 34

On choisit 5 cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de résultats comprenant :

1. exactement 2 valets ;
2. aucun as ;
3. au moins 3 dames ;
4. 2 trèfles et 3 carreaux ;
5. 2 cartes d'une couleur et trois de l'autre ;
6. au moins un roi ;
7. 3 piques et 2 roi ?

Exercice 35

On tire successivement 4 boules d'un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes. Déterminer le nombre de tirages permettant d'obtenir :

a. 4 boules jaunes ;

b. 4 boules vertes ;

c. 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;

d. 3 jaunes et une verte ;

e. 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ;

f. deux jaunes et deux vertes ;

g. au moins 3 vertes ;

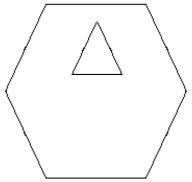
h. au plus 3 jaunes.

Exercice 36

Calculer le nombre d'anagrammes formées avec les lettres des mots PERE, THEOREME, ANANAS.

Exercice 37

Un enfant dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9 et d'une feuille reproduisant la figure ci-dessous (sans les jetons !).



Il doit placer 5 jetons dans l'hexagone dont 2 dans le triangle.

1. Calculer le nombre de répartitions possibles suivant qu'il adopte l'une ou l'autre des stratégies suivantes

Stratégie 1 : choix des 2 jetons à placer dans le triangle puis choix des 3 jetons à placer en dehors du triangle.

Stratégie 2 :choix des 5 jetons à placer dans l'hexagone et choix parmi ceux-ci des 2 à placer dans le triangle.

Que peut-on observer ?

2. a. On reprend la démarche précédente avec n jetons, dont p sont à placer dans l'hexagone, k d'entre eux prenant place dans le triangle.

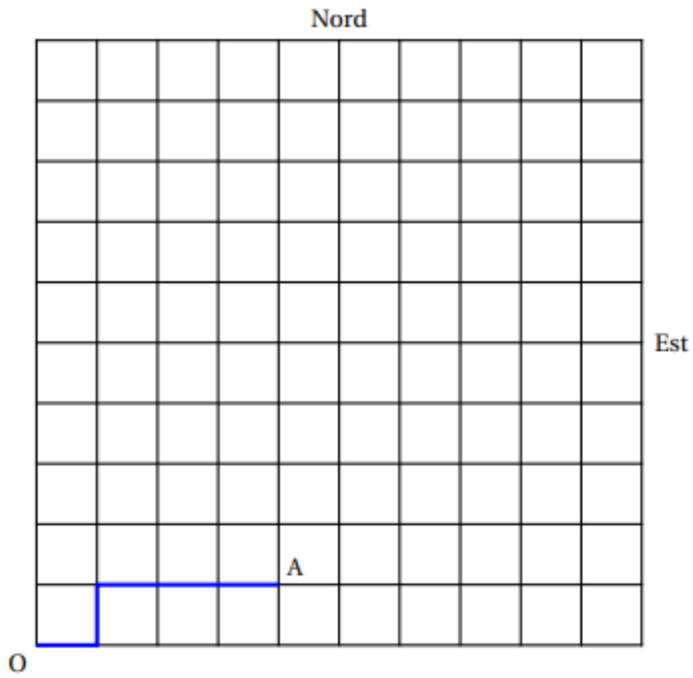
   b. En déduire, pour $0 \leq k \leq p \leq n$, l'égalité suivante :

$$\binom{n}{p} \times \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{p-k}$$

   La vérifier par le calcul.

Exercice 38 corrigé disponible

Les rues d'une ville nouvelle sont structurées de telle sorte que les côtés de maisons sont des carrés superposables et les rues sont toutes parallèles ou perpendiculaires. On identifie le plan de la ville au quadrillage d'un carré de 10 unités sur 10 dans lequel on se repère avec des points à coordonnées entières qui correspondent aux carrefours :



Le point O a pour coordonnées (0 ; 0), le point A a pour coordonnées (4 ; 1).
On s'intéresse aux chemins partant de O et arrivant à un autre point M de coordonnées (p ; q) où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$.

À chaque intersection, on ne peut aller que vers le nord (N) ou vers l'est (E).

Dans tout l'exercice, on décrit un chemin à l'aide d'un mot composé successivement des lettres N ou E qui indiquent dans l'ordre la direction à suivre à chaque intersection.
On appelle *longueur* d'un chemin le nombre de lettres employées pour le décrire.
Par exemple :
Pour se rendre en A, on peut suivre par exemple les chemins NEEEE ou ENEEE (marqué en gras sur la figure) ; ces deux chemins ont une longueur égale à 5.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A - Dénombrement

1. Donner la liste de tous les chemins permettant de se rendre en A.
2. Soit M un point de coordonnées (p ; q) où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$.
   Exprimer, en fonction de p et q, la longueur des chemins qui permettent d'arriver en M.
3. Montrer qu'il y a $\binom{p+q}{p}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M.
4. Dénombrer les chemins pour arriver au point C de coordonnées (7 ; 5).
5. Dénombrer les chemins pour arriver en C en passant par A.

Exercice 39 corrigé disponible

Dans une maison de retraite, 100 personnes jouent à différents jeux de société dont le Scrabble, le Bridge et le Yams.
34 préfèrent le Scrabble, 21 le Bridge et 26 le Yams.
Par ailleurs, 6 jouent uniquement au Bridge et au Yams, 5 jouent uniquement au Yams et au Scrabble et 8 jouent uniquement au Bridge et au Scrabble. De plus, 12 jouent au moins au Bridge et au Scrabble.

1) Déterminer le nombre de personnes qui jouent aux trois jeux.

2) Déterminer le nombre de personnes qui jouent à d'autres jeux.

3) Déterminer le nombre de personnes qui ne jouent qu'à un seul de ces jeux.

Exercice 40 corrigé disponible

Dans un restaurant d'entreprise, le repas comporte une entrée, un plat et un dessert.
Le menu propose au choix trois entrées, deux plats et trois desserts.
De combien de manières peut-on composer un repas ?

Exercice 41 **corrigé disponible**

Le digicode d'un immeuble est composé des 5 chiffres de 1 à 5 et des lettres A, B et C.

1) a) Combien de codes contenant cinq caractères peut-on composer ?

b) Combien de codes à trois chiffres suivis deux lettres peut-on composer ?

c) Combien de codes à trois chiffres suivis deux lettres, commençant par 2 et finissant par C, peut-on composer ?

2) On suppose dans cette question que les chiffres et les lettres constituant le code sont tous distincts.

a) Combien de codes contenant 5 caractères peut-on composer ?

b) Combien de codes à trois chiffres suivis deux lettres peut-on composer ?

c) Combien de codes à trois chiffres suivis deux lettres, commençant par 2 et finissant par C, peut-on composer ?

Exercice 42

I. *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. a. On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.

b. On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».
Calculer la probabilité de B.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 43

On considère un ensemble E = {a ;b ;c}

1) Déterminer le nombre total de sous-ensembles de E et les donner explicitement.
2) Déterminer le nombre de permutations de E et les donner.
3) Déterminer le nombre de sous-ensembles à deux éléments et les donner.
4) Déterminer le nombre de couples de E et les donner.

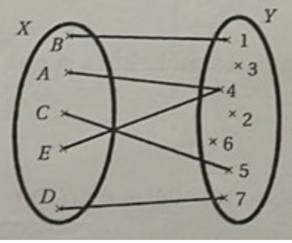
Exercice 44

On cherche à constituer un groupe de six personnes choisies par vingt-cinq femmes et trente-deux hommes.

1) Combien de façons y a-t-il de constituer ce groupe ?
2) Combien y en a-t-il ne comportant que des hommes ?
3) Combien y en a-t-il ne comportant que des personnes de même sexe ?
4) Combien y en a-t-il comportant au moins une femme et au moins un homme.

Exercice 45 **corrigé disponible**

On joint chaque lettre de l'ensemble A à l'un quelconque des chiffres de l'ensemble B.



Combien y a-t-il de liaisons possibles dans chaque cas :

1. deux lettres distinctes sont reliées à des chiffres distincts;
2. des lettres distinctes peuvent être reliées au même chiffre.

Exercice 46 **corrigé disponible**

1. De combien de façons 2 personnes peuvent-elles occuper 6 sièges alignés? en cercle?
2. De combien de façons peut-on placer 18 personnes autour d'une table ronde?
3. Les initiales d'une personne sont le couple formé par la première lettre de son prénom et la première lettre de son nom.
   Montrer que, dans un village d'au moins 677 habitants, il existe toujours deux personnes ayant les mêmes initiales.
4. Combien d'équipes de basket (5 joueurs) peut-on former avec les 35 élèves d'une classe?

Exercice 47 corrigé disponible

Un Q.C.M. est constitué de 8 questions. Pour chacune d'elles, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Un candidat répond au hasard.

1. Déterminer le nombre de réponses possibles à ce Q.C.M.
2. a. Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses.
   b. Déterminer le nombre de cas où le candidat répond correctement à 6 questions.
3. Déterminer le nombre de cas où le candidat donne au moins 6 réponses exactes.
4. Le candidat est reçu s'il donne au-moins 6 réponses exactes. Qu'elle est la probabilité qu'il soit reçu en répondant au hasard?

Exercice 48 corrigé disponible

Pour entrer dans son immeuble Math doit composer un code à 5 caractères sur un clavier composé des dix chiffres et des lettres A et B.

1. Combien y a-t-il de codes composés de 4 chiffres puis d'une lettre.
2. Combien y a-t-il de codes composés de 4 chiffres et d'une lettre (non nécessairement à la fin).
3. Les chiffres 3 et 8 ne fonctionnent plus, combien y a-t-il de codes composés de 3 chiffres et de 2 lettres.