EXERCICE 19

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit le point A d'affixe $1+i$.

À tout point $M(z)$ avec $z \neq 0$, on associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{z-1-i}{z}$
Le point M′ est appelé le point image du point M.

1) a) Déterminer, l'affixe du point B′, image du point $B(i)$.
   b) Montrer que, pour tout point $M(z)$ avec $z \neq 0$, l'affixe z' du point M′ est telle que $z' \neq 1$.
2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ avec $z \neq 0$ tel que l'affixe du point M′ est telle que $|z'| = 1$.
3) Quel est l'ensemble des points $M(z)$ avec $z \neq 0$ tel que l'affixe du point M′ est un nombre réel ?

3) On pose $z = x+iy$. On calcule alors z' :

$$z' = \frac{z-1-i}{z}$$

$$z' = \frac{x+iy-1-i}{x+iy}$$

$$z' = \frac{(x+iy-1-i)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}$$

$$z' = \frac{x^2 \cancel{-ixy} \cancel{+ixy} + y^2 - x + iy - xi - y}{x^2+y^2}$$

$$z' = \frac{x^2+y^2-x-y+i(y-x)}{x^2+y^2}$$

$$\boxed{z' = \frac{x^2+y^2-x-y}{x^2+y^2} + i \times \frac{y-x}{x^2+y^2}}$$

On veut que z' soit réel, alors $\mathrm{Im}(z') = 0$.

$$\frac{y-x}{x^2+y^2} = 0.$$

Un quotient est nul ssi son numérateur est nul :

$$y - x = 0.$$

$$\boxed{y = x} \qquad (x;y) \neq (0;0).$$

L'ensemble des points M recherchés est les points appartenant à la 1ère bissectrice privée du point O (0;0).

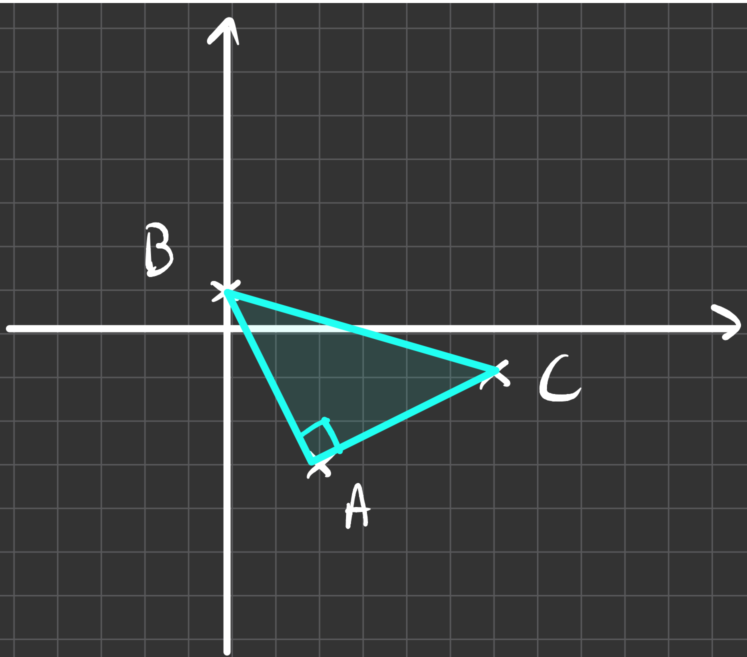
EXERCICE 20

Soit le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
L'unité graphique est 1 cm.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$.

Partie A

1) Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.



1). $$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{i-(2-3i)}{(6-i)-(2-3i)}$$

$$= \frac{i-2+3i}{6-i-2+3i}$$

$$= \frac{-2+4i}{4+2i} = \frac{-1+2i}{2+i}$$

$$= \frac{i(\cancel{i+2})}{(\cancel{2+i})}$$

$$= i$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)$$

plus de bonnes notes

$$(\vec{AC};\vec{AB}) = \text{Arg}(i)$$

$$(\vec{AC};\vec{AB}) = \frac{\pi}{2}$$

Le triangle ABC est donc rectangle en A.

Partie B

On considère l'application f qui, au point $\text{M}(z)$ avec $z \neq i$, associe le point $\text{M}'(z')$ telle que :

$$z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}$$

1) Soit $\text{D}(1-i)$. Déterminer l'affixe du point D' image du point D par f.

$$z_{D'} = \frac{i(1-i-2+3i)}{1-i-i}$$

$$z_{D'} = \frac{i(-1+2i)}{1-2i} = \frac{-2-i}{1-2i}$$

$$\frac{\cancel{(-2-i)}}{i\cancel{(-2-i)}} = \frac{1\times i}{i\times i}$$

$$= \frac{i}{-1} = \boxed{-i}$$

2) a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par f est le point d'affixe $2i$.

$$z' = 2i \qquad z \neq i$$

$$\frac{i(z-2+3i)}{z-i} = 2i$$

$$i(z-2+3i) = 2i(z-i)$$

plus de bonnes notes

$$iz - 2i - 3 = 2iz + 2$$

$$iz - 2iz = 2 + 2i + 3$$

$$z \times (-i) = 5 + 2i$$

$$z = \frac{5+2i}{-i}$$

$$\boxed{z = 5i - 2}$$

d'affixe 2i.

b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).

$z_E = -2 + 5i$ $\quad z_B = i$

$z_A = 2 - 3i$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = -2 + 4i$$

$$z_{\overrightarrow{AE}} = -2 + 5i - (2 - 3i)$$

$$z_{\overrightarrow{AE}} = -4 + 8i$$

$$2 \times z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{AE}}$$

$$2 \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

Les points A, E et B sont alignés.

plus de bonnes notes

b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).

3) Démontrer que, pour tout point M distinct de B, $OM' = \dfrac{AM}{BM}$.

$$\frac{AM}{BM} = \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} \; \cdots\cdots\rightarrow \; = OM'.$$

Les nombres complexes

I-PRESENTATION

1. Ensemble des nombres complexes

Définition du nombre $\boldsymbol{i}$

Dans ce cours, on admet qu'il existe un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ qui contient l'ensemble des nombres réels et qui vérifie un certain nombre de propriétés :

- $\mathbb{C}$ possède un nombre i tel que $i^2 = -1$.
- Tous les éléments de $\mathbb{C}$ s'écrivent sous la forme $a + ib$ où a et b sont des réels.
- $\mathbb{C}$ est doté de l'addition et de la multiplication et possède les mêmes propriétés que dans l'ensemble des nombres réels.

Si un ensemble vérifie toutes ces propriétés, alors il s'agit de l'ensemble des nombres complexes.

2. La forme algébrique

Théorème

Tous les nombres complexes peuvent s'écrire sous la forme $\boldsymbol{z = a + ib}$ où $z \in \mathbb{C}$ et $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ (a et b sont des réels)

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors, la partie réelle de z est notée $Re(z)$ et $\boldsymbol{Re(z) = a}$.
De plus, la partie imaginaire de z est notée $Im(z)$ et $\boldsymbol{Im(z) = b}$.

Remarque : Attention, de nombreux élèves se trompent en prenant pour partie imaginaire $Im(z) = ib$ alors que i ne fait pas partie de la partie imaginaire.

Exemple

La partie imaginaire de $z = -2 - 4i$ n'est pas $-4i$ mais -4.

Théorème

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont respectivement égales. En effet, si :

$$\boldsymbol{a + ib = x + iy}$$
alors,
$$\boldsymbol{a = x \text{ et } b = y}$$

3. Module et conjugué d'un nombre complexe

Définition du conjugué

Tous les nombres complexes possèdent un unique nombre conjugué. Soit $z = a + ib$ où a et b sont des réels, alors le conjugué de z noté $\bar{z}$, s'exprime par la formule suivante :

$$\boldsymbol{\bar{z} = a - ib}$$

De cette définition découlent un certain nombre de propriétés à connaitre par cœur et à **savoir démontrer.**

Exemple

Si $z = 2 - 3i$ alors $\bar{z} = 2 + 3i$

Propriétés (règles de calcul)

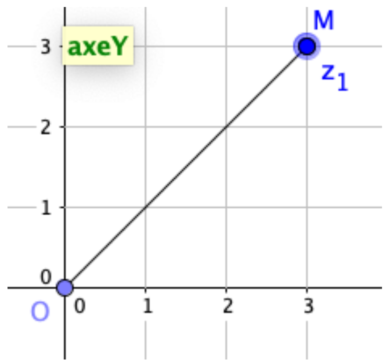
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z\prime}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z\prime}}$ où z' est non nul.
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ où n est un entier relatif.
- $z + \bar{z} = 2Re(z)$ et $z - \bar{z} = 2iIm(z)$
- z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$
- $\boldsymbol{\bar{\bar{z}} = z}$
- z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$

Définition du module

Soit z un nombre complexe défini sous sa forme algébrique : $z = a + ib$. Alors, le module de z se note $|z|$ et se calcule ainsi :

$$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$$

Géométriquement, $|z|$ représente la distance entre le point O et le point M d'affixe z.



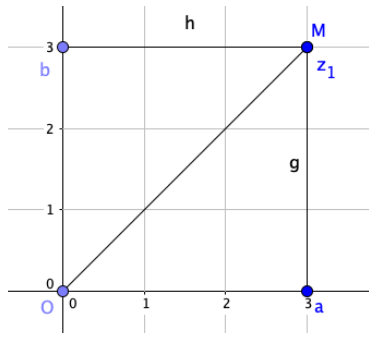
Propriétés et règles de calcul

- $\boldsymbol{z} \times \overline{\boldsymbol{z}} = |\boldsymbol{z}|^2$
- $|\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}'| = |\boldsymbol{z}| \times |\boldsymbol{z}'|$
- $\left|\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}'}\right| = \frac{|\boldsymbol{z}|}{|\boldsymbol{z}'|}$
- $|\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{n}} = |\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}}|$

4. Complexes et géométrie plane

Définition d'affixe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $R\ (O; \vec{u}; \vec{v})$. Alors à tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe un unique point M du repère R où M a pour coordonnées $(a; b)$. Ainsi, il y a une correspondance entre l'ensemble des nombres complexes et le plan. Dès lors z est appelé affixe du point M.



De la même manière que pour un point, on peut également parler d'affixe pour un vecteur : soit $\vec{u}(a; b)$ alors l'affixe du vecteur $\vec{u}$ se note $z_{\vec{u}}$ et vaut $z_{\vec{u}} = a + ib$

Propriété

Soient deux points du plan A et B qui ont pour affixes respectifs : z_a et z_b. Alors :

$$\boldsymbol{z}_{\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}} = \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{A}}$$

Conséquences immédiate

Soient A et B deux points du plan, alors :

$$\boldsymbol{AB} = |\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{A}}|$$

II- LES EQUATIONS DU SECOND DEGRE

En classe de première vous avez appris à résoudre les équations du second degré du style :

$$ax^2 + bx + c = 0, a \in \mathbb{R}^*, (b; c) \in \mathbb{R}$$

Si le discriminant de cette équation était négatif, alors on affirmait à juste titre que cette équation n'a pas de solutions réelles. En effet, elle n'a pas de solutions réelles mais elle possède des solutions complexes conjuguées l'une de l'autre. On a :

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ où } a \neq 0$$

$$\text{Si } \Delta = b^2 - 4ac < 0, \text{ alors :}$$

$$\boldsymbol{z}_1 = \frac{-\boldsymbol{b} - \boldsymbol{i}\sqrt{-\Delta}}{2\boldsymbol{a}} \text{ ou } \boldsymbol{z}_2 = \frac{-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{i}\sqrt{-\Delta}}{2\boldsymbol{a}}$$

On remarquera que $Z_2 = \overline{Z_1}$

$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

III. FORME TRIGONOMETRIQUE

1. Module et argument

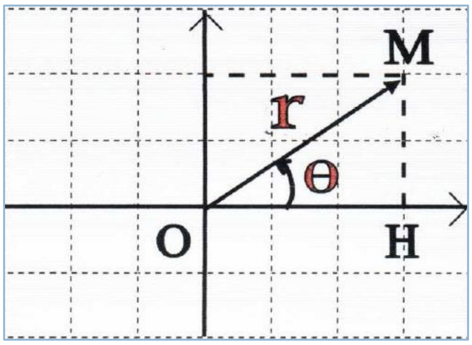
Définitions

Soit P le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Soit M le point d'affixe $z = a + ib$. Ainsi, M a pour coordonnées $M(a\,;b)$.

Le module de z noté $|z|$ correspond géométriquement à la distance OM. On note :

$$|z| = OM$$

De plus, l'argument de z (différent de 0) noté $\arg(z)$ correspond géométriquement à l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.



Remarques

Le nombre complexe 0 n'a pas d'arguments mais possède un module égal à 0.
Le module d'un nombre est toujours positif.
Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments du fait de la cyclicité du cercle trigonométrique.

Dans la pratique ça donne quoi ?

Dans les exercices vous serez amenés à calculer le module et l'argument de différents nombres complexes. Pour cela il suffit d'appliquer les formules suivantes :

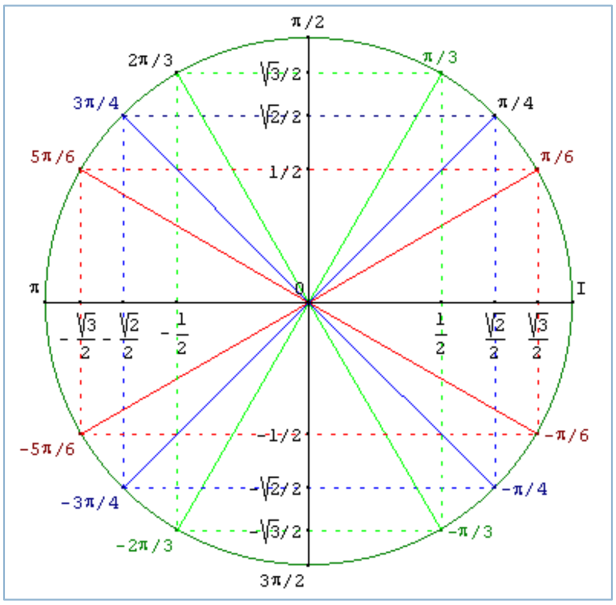
- Pour le module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ où a et b sont des nombres réels correspondant respectivement à la partie réelle et la partie imaginaire du nombre z.
- Pour l'argument c'est un peu plus compliqué : il faut résoudre le système suivant d'inconnue θ :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{Re(z)}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{Im(z)}{|z|} \end{cases}$$

Application

Déterminer le module et l'argument de $z = 1 + i$.

2. Angles remarquables dans le cercle trigonométriques



3. Forme trigonométrique

Définition

Tout nombre complexe, peut s'écrire sous la forme :

$$z = |z|(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$$

Cette forme s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe z.

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes. On a alors :

$z = z' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \end{cases}$$

La démonstration est triviale et sera faite à l'oral.

4. Quelques formules de trigonométries

Formule d'addition

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(\text{a})\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Démonstration en exercice

Formule de duplication

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - sin^2(a)$
  $= 2cos^2(a) - 1 = 1 - 2sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Démonstrations en exercice

IV. FORME EXPONENTIELLE

1. Définition

Définition

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme :

$$z = |z| \times e^{i\theta}$$

Où :

$$\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$$

2. Formules d'Euler et de Moivre

Formule d'Euler

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) + isin(n\theta) = \left(\cos(\theta) + isin(\theta)\right)^n$

V. LES RACINES n-IEMES DE L'UNITE

Définition

On appelle cercle unité, et on note $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1. Donc $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

Propriété

Soient deux nombres complexes z et z' dans $\mathbb{U}$ alors on a :

- $zz' \in \mathbb{U}$
- $\frac{z}{z\prime} \in \mathbb{U}$

Démonstrations en exercice

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racines n-ièmes de l'inité les solutions de l'équation :

$$z^n = 1$$

Propriété

Les solutions de l'équation précédente sont dans l'ensemble suivant :

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n-1\right\}$$

Si $n \geq 3$, alors les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés.

Démonstrations en exercice

Les nombres complexes
Le point de vue géométrique

Angle orienté et mesure principale

EXERCICE 1

Tracer un cercle trigonométrique puis placer les points des angles suivants :

- π
- $\dfrac{\pi}{4}$
- $\dfrac{3\pi}{2}$
- $\dfrac{\pi}{6}$
- $-\dfrac{\pi}{3}$
- $-\dfrac{3\pi}{4}$
- $\dfrac{5\pi}{6}$
- $-\dfrac{3\pi}{2}$

EXERCICE 2

Déterminer la mesure principale correspondant aux angles α suivants :

1) $\alpha = \dfrac{7\pi}{2}$ 2) $\alpha = -\dfrac{4\pi}{3}$ 3) $\alpha = \dfrac{35\pi}{6}$ 4) $\alpha = -\dfrac{21\pi}{4}$ 5) $\alpha = \dfrac{202\pi}{3}$

EXERCICE 3

Placer puis déterminer les valeurs du cosinus et sinus des angles suivants :

1) $\dfrac{\pi}{6}$ 2) $\dfrac{5\pi}{6}$ 3) $\dfrac{7\pi}{6}$ 4) $\dfrac{11\pi}{6}$ 5) $\dfrac{13\pi}{6}$

EXERCICE 4

Placer puis déterminer les valeurs du cosinus et sinus des angles suivants :

1) $\dfrac{\pi}{4}$ 2) $\dfrac{9\pi}{4}$ 3) $\dfrac{5\pi}{4}$ 4) $\dfrac{81\pi}{4}$ 5) $-\dfrac{108\pi}{4}$

EXERCICE 5

Placer puis déterminer les valeurs du cosinus et sinus des angles suivants :

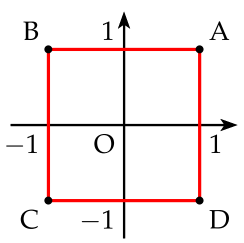
1) $\dfrac{4\pi}{3}$ 2) $\dfrac{\pi}{3}$ 3) $\dfrac{71\pi}{3}$ 4) $\dfrac{97\pi}{3}$ 5) $-\dfrac{54\pi}{3}$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

EXERCICE 6

Dans le repère orthonormal direct,on a représenté le carré ABCD ci-contre.

Donner l'affixe et un argument de chacun des sommets du carré ABCD



EXERCICE 7

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ 3) $z_3 = 4 - 4i$ 5) $z_5 = -2i$

2) $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ 4) $z_4 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{i\sqrt{3}}{4}$ 6) $z_6 = \dfrac{4}{1-i}$

EXERCICE 8

À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée en degré à 10^{-2} près d'un argument de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z = 4 - 3i$ 2) $z = 1 + 2i$ 3) $z = -2 + i$

EXERCICE 9

Trouver une forme trigonométrique, en utilisant les opérations sur les modules et arguments de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z = (1-i)^6$ 2) $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$ 3) $z = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$

EXERCICE 10

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

1) Donner le module et un argument de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$

2) Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$

3) En déduire que : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Forme exponentielle

$z = a + ib = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}$

EXERCICE 11

Donner une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

1) $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$ 2) $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^4$ 3) $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants, écrire z sous la forme exponentielle et en déduire la forme algébrique de $\overline{z}$ et $\dfrac{1}{z}$.

1) $z_1 = \dfrac{6}{1+i}$ 2) $z_2 = 3i\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ 3) $z_3 = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$

EXERCICE 13

1) a) Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$ à l'aide de la formule de Moivre et du développement de $(a+b)^3$.

b) En déduire que : $\cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$ et $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$.

2) Retrouver ces deux formules à l'aide des formules d'Euler.

Ensemble de points

EXERCICE 14

Déterminer et construire les ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 des points dont l'affixe z vérifie la condition proposée.

1) $z = 3\,e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0; 2\pi[$

2) $z = r\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $r \in [0; +\infty[$

3) $z = k\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

EXERCICE 15

A et B ont pour affixes respectives 1 et $3 + 2i$.
Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 et Γ_2, ensemble des points M dont l'affixe z satisfait les conditions suivantes :

1) $|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$

2) $|z - (3 + 2i)| = 1$

Triangle

EXERCICE 16

Soit les points A(a), B(b) et C(c) tels que : $a = 1 + \dfrac{3}{4}i$, $b = 2 - \dfrac{5}{4}i$, $c = 3 + \dfrac{7}{4}i$.

1) Placer les points A, B et C.
2) Quelle est la nature du triangle ABC ?
3) Calculer l'affixe de A′ tel que ABA′C soit un carré.

EXERCICE 17

Soit le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct$(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit les points A(a), B(b) et C(c) tels que : $a = -2 + 2i$, $b = -3 - 6i$ et $c = 1$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Applications dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 18

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f l'application définie dans $\mathbb{C} - \{-2i\}$ par : $f(z) = \dfrac{z - 2 + i}{z + 2i}$.

1) On pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et de y puis montrer que :

$$\mathrm{Re}[f(z)] = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}[f(z)] = \frac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}$$

⚠ Soyez patient et méthodique !

2) En déduire la nature de :
   a) l'ensemble E des points M d'affixe z du plan, tels que $f(z)$ soit un réel ;
   b) l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur ou éventuellement nul.
   c) Représenter ces deux ensembles.

EXERCICE 19

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit le point A d'affixe $1 + i$.
À tout point $M(z)$ avec $z \neq 0$, on associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{z - 1 - i}{z}$
Le point M' est appelé le point image du point M.

1) a) Déterminer, l'affixe du point B', image du point B(i).
   b) Montrer que, pour tout point $M(z)$ avec $z \neq 0$, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ avec $z \neq 0$ tel que l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
3) Quel est l'ensemble des points $M(z)$ avec $z \neq 0$ tel que l'affixe du point M' est un nombre réel ?

EXERCICE 20

Soit le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
L'unité graphique est 1 cm.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$.

Partie A

1) Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
2) En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B
On considère l'application f qui, au point $M(z)$ avec $z \neq i$, associe le point $M'(z')$ telle que :

$$z' = \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}$$

1) Soit $D(1 - i)$. Déterminer l'affixe du point D' image du point D par f.
2) a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par f est le point d'affixe $2i$.
   b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).
3) Démontrer que, pour tout point M distinct de B, $OM' = \dfrac{AM}{BM}$.
4) Démontrer que, pour tout point M distinct de A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

5) Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M′ appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6) Démontrer que si le point M′ appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

EXERCICE 21

Soit le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
L'unité graphique est 2 cm.
On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

Soit les points $\mathrm{A}(1)$ et $\mathrm{B}(-1)$.
Soit l'application f qui, à tout point $\mathrm{M}(z)$ distinct de B, associe le point $\mathrm{M}'(z')$ telle que :

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

1) Déterminer les points invariants M de f, tels que M = f(M).
2) a) Montrer que pour $z \neq -1$: $(z'-1)(z+1) = -2$.
   b) En déduire pour $z \neq -1$ une relation entre :
   $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$.
   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3) Montrer que si M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 2, alors M′ appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre A et de rayon 1.
4) Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.
   a) Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.
   b) Montrer que le point P appartient au cercle $\mathscr{C}$.
   c) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
   Montrer que les points A, P′ et Q sont alignés dans cet ordre.
   d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction à la règle et au compas de l'image P′ du point P par l'application f.

Vrai-Faux

EXERCICE 22

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit $\mathrm{A}(2-5i)$ et $\mathrm{B}(7-3i)$.
   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2) Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z-i| = |z+2i|$.
   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.
3) Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4) Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i+z| = 1 + |z|$.

5) Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si $z \in \mathbb{U}$ alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2} \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 23

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) **Proposition 1** : Pour tout entier naturel n : $(1+i)^{4n} = (-4)^n$.

2) Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2 - 4z + 8\right) = 0$ où $z \in \mathbb{C}$.
Proposition 2 : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3) **Proposition 3** : Pour tout nombre réel α, $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha}\cos(\alpha)$.

4) Soit A le point d'affixe $z_A = \dfrac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Proposition 4 : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5) Soit $j \in \mathbb{U}$, d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
Proposition 5 : On a légalité : $1 + j + j^2 = 0$.

Complexes et suite

EXERCICE 24

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$

1) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

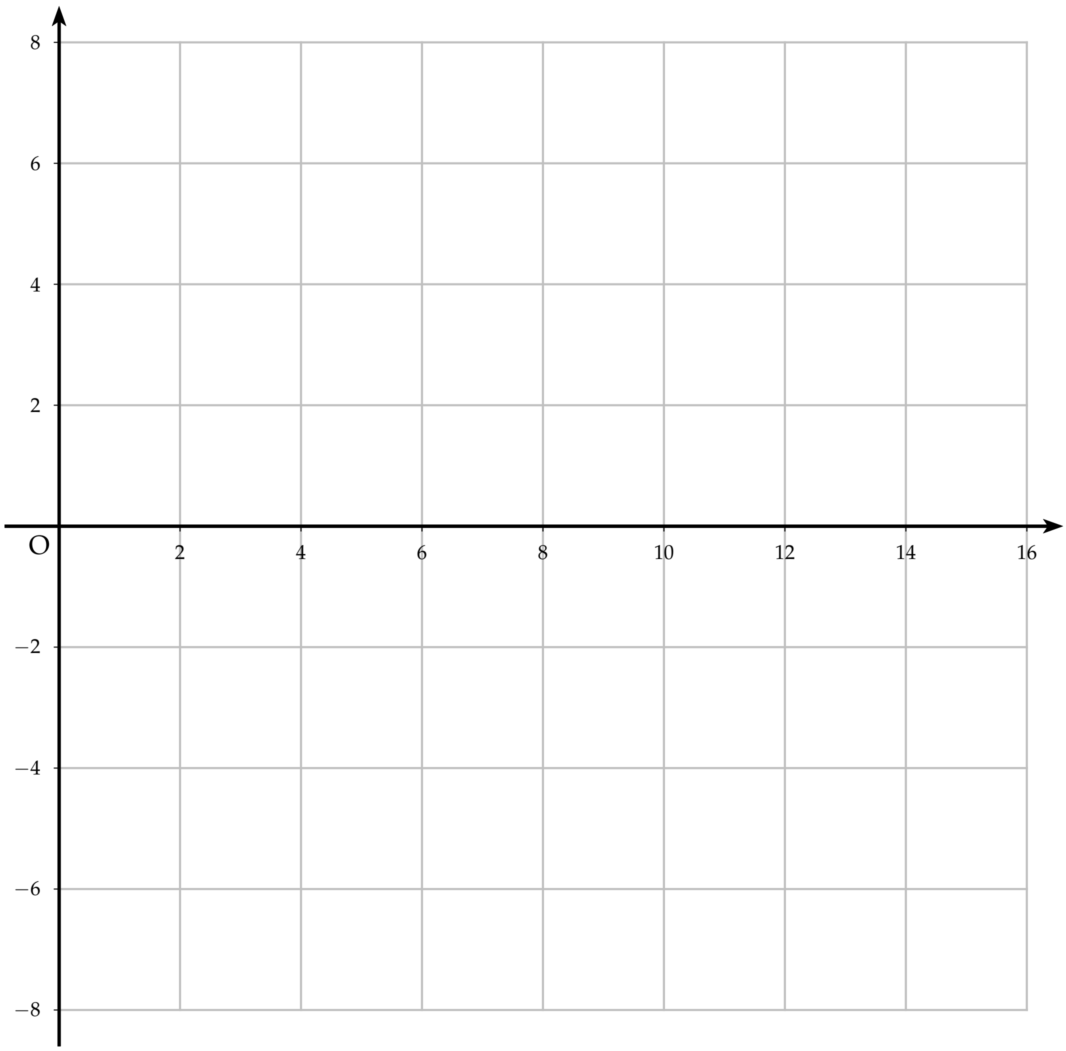
2) Soit la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i\,(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.
   a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée ci-dessous et tracer, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.

3) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n i}{2}\right)$.

4) Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5) On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}\,(2^n - 1)$.
   b) Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1\,000$.



EXERCICE 25

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n$.

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$.

2) a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

   c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3) Soit la fonction f en Python suivante :

```python
from math import*
def f(p):
    n=0
    while r<p:
        n+=1
        r=sqrt(3)/2*r
    return n
```

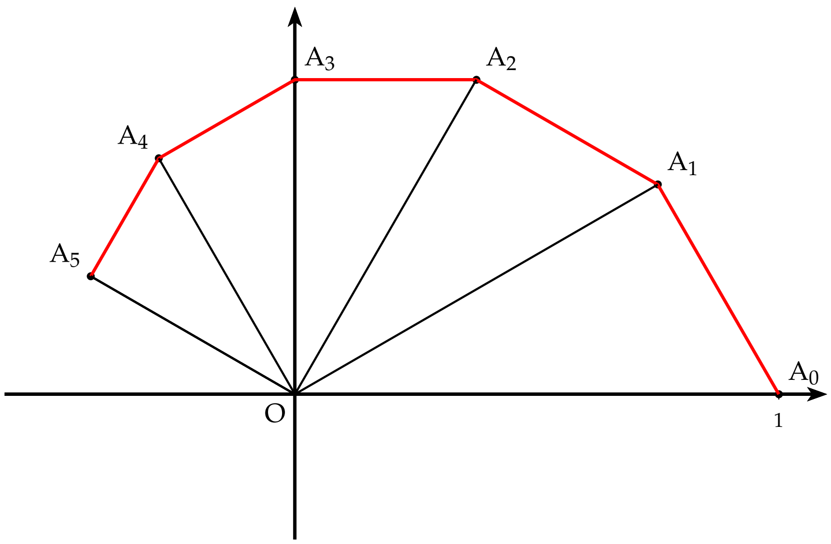
   a) Quelle est la valeur retournée pour $f(0.5)$?

   b) La valeur retournée pour $f(0.01)$ est 33. Quel est le rôle de cette fonction f ?

4) a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b) On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est sur l'axe des ordonnées.

c) Compléter la figure suivante, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9. Les traits de construction seront apparents.



EXERCICE 26

Soit la suite (z_n) définie dans $\mathbb{C}$ par : $z_0 = \sqrt{3} - i$ et $z_{n+1} = (1+i)z_n$.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1) Calculer u_0.
2) Démontrer que (u_n) est la suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B

1) Déterminer la forme algébrique de z_1.
2) Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+i$.
En déduire la forme exponentielle de z_1.
3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

EXERCICE 27

On définit la suite (z_n) sur $\mathbb{C}$ par : $\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On note r_n le module du terme z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan complexe d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1) a) Calculer z_1, z_2 et z_3.
   b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique.
   c) Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
   d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.
2) a) Démontrer que la suite (r_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) La suite (r_n) est-elle convergente ? Interpréter géométriquement ce résultat.
3) On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

   Ainsi $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.
   a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.
   b) Donner une expression de L_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).