Exercice 34

On choisit 5 cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de résultats comprenant :

1. exactement 2 valets ;
2. aucun as ;
3. au moins 3 dames ;
4. 2 trèfles et 3 carreaux ;
5. 2 cartes d'une couleur et trois de l'autre ;
6. au moins un roi ;
7. 3 piques et 2 roi ?

7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
V	V	V	V
D	D	D	D
R	R	R	R
As	As	As	As
♥	♦	♠	♣

1) $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19\,656.$

2) $\binom{28}{5} = 98\,280.$

3) $\underline{\underline{3 \text{ dames}}}$, $\underline{2 \text{ autres}}$ $\longrightarrow \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} = 1512.$

$\underline{\underline{4 \text{ dames}}}$, $\underline{1 \text{ carte}}$ $\longrightarrow \binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 28.$

$1512 + 28 = 1540.$

4) $\binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1568.$

5) 2 cartes rouges et 3 cartes noires.

$\binom{16}{2} \times \binom{16}{3} = 67\,200.$

2 cartes noires et 3 cartes rouges.

$\binom{16}{2} \times \binom{16}{3} = 67\,200$

$\underline{\underline{134\,400.}}$

6. 1 roi 4 autres : $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4} = 81\,900$.

2 rois 3 autres. $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19\,656$.

3 rois 2 autres. $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2} = 1512$

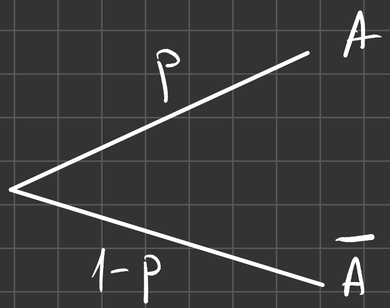
4 rois 1 autre. $\binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 28$

Total $= 103\,096$.

7. $\binom{8}{3} \times \binom{4}{2} = 336$.

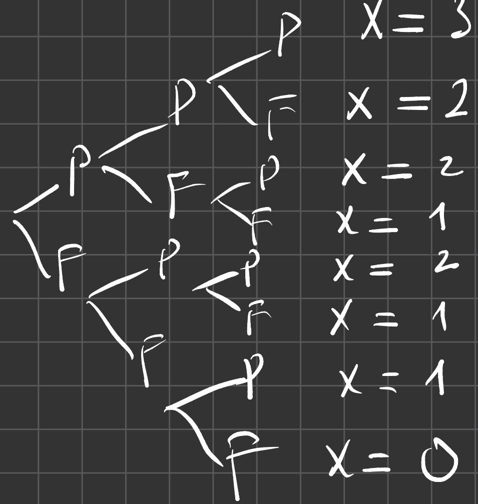
Probabilités et loi binomiale.

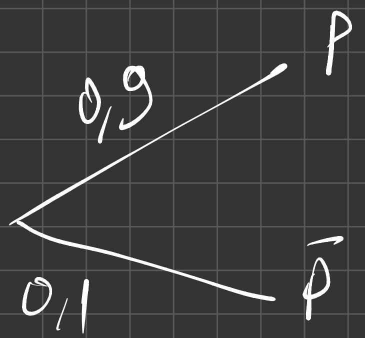
Épreuve (schéma de Bernoulli).



On répète cette expérience de manière identique et indépendante n fois. Alors la variable aléatoire X qui compte le nbre de fois où A se réalise suit la loi binomiale de paramètres $B(n;p)$.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^{k} \times (1-p)^{n-k}.$$





$$P(X=20) = \binom{20}{20} \times 0{,}9^{20} \times 0{,}1^{0}.$$

$$= 0{,}9^{20} = 0{,}12$$

$$= 12\,\%.$$

20 0 $\longrightarrow$ 10

10 10 $\longrightarrow$ 10.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

5

D_a 4 faces. D_b 5 faces. D_c 6 faces. D_d 7 faces.

D_a	D_b
D_c	D_d

$$P_{D_b}(3) = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Exercice 2 **corrigé disponible**

Un constructeur de composants produit des résistances. La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est égale à 5×10^{-3}.

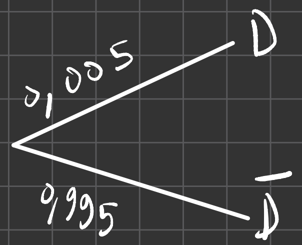
Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir

a. Exactement deux résistances défectueuses ?

b. Au plus deux résistances défectueuses ?

c. Au moins deux résistances défectueuses ?

a) L'expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli :

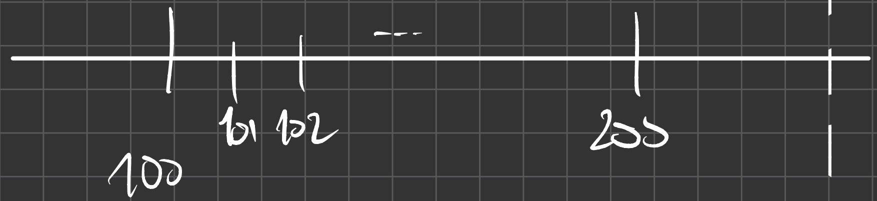


On répète cette expérience 1000 fois de manière indépendante et identique. Ainsi, la variable aléatoire X qui compte le nombre de pièces défectueuses suit la loi binomiale de paramètres $B(1000\,;\,0{,}005)$

$$P(X=2) = 0{,}084$$

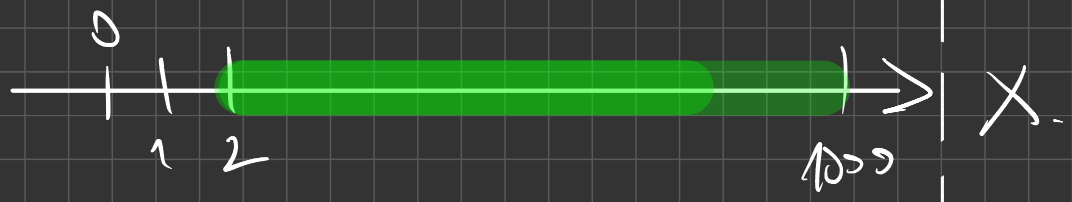
b) $P(X \leq 2) = 0{,}124$.

$$P(100 \le X \le 200) = \text{BinomFRéP}(200) - \text{BinomFRéP}(99)$$



c) $P(X \geq 2) = 0{,}96$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

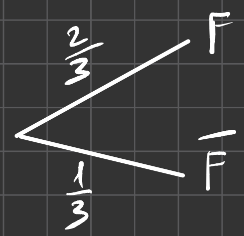


Exercice 3 **corrigé disponible**

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.
On considère un entier positif ou nul n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours consécutifs.

1) Quelle est la loi de X ?
2) Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ? au moins 4 filles ?
3) Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

1) L'expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli :



On répète cette expérience n fois de manière identique et indépendante. Alors, la variable aléatoire X qui compte le nombre de filles interrogées suit la loi binomiale de paramètres $B\left(n\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

2) $P(X=4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(1-\frac{2}{3}\right)^{10-4} = 0,057$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$$
$$= 0,98$$

$$P(X=0) \leq 0,001$$

$$\binom{n}{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 0,001$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 0,001$$

$$\ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \leq \ln(0,001)$$

$$n \ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq \ln(0,001)$$

$$n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$n \geq 6,28$$

$$\boxed{n \geq 7}$$

Loi binomiale – Fiche de cours

1. Loi binomiale

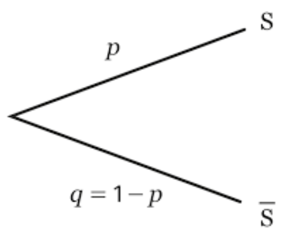
1.1. Définitions

- Loi ou épreuve de Bernouilli

La loi de Bernouilli est une expérience aléatoire avec 2 issues :

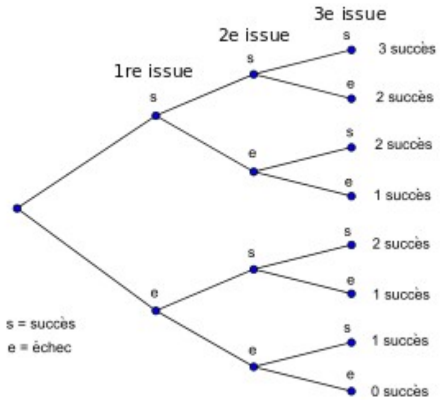
- Succès : probabilité p
- Echec : probabilité $1-p$

p est appelé paramètre de la loi de Bernouilli



- Loi binomiale

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès
Pour n répétitions identiques et indépendantes de la loi de Bernouilli de paramètre p, X suit une loi binomiale B(n ; p)



1.2. Probabilité de la loi binomiale

On souhaite obtenir k fois le succès lors de n répétitions pour la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale B(n ; p)

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

1.3. Espérance et écart type

- Espérance mathématique

$$E(X)=n\times p$$

- Variance et l'écart type

$$V(X)=n\times p\times(1-p) \qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

1.4. Propriété de la loi binomiale

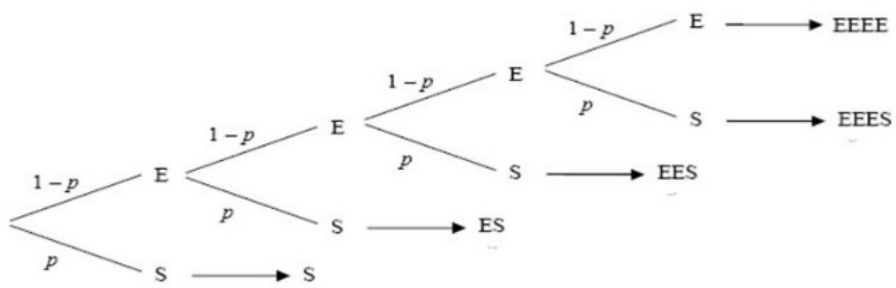
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n;p)$ et $0\leq\alpha\leq1$; alors il existe un intervalle $I=[a;b]$ tel que :

- $P(X\in I)\geq1-\alpha$ ou $P(a\leq X\leq b)\geq1-\alpha$
- $P(X\in I)\leq\alpha$ ou $P(a\leq X\leq b)\leq\alpha$

2. Autres lois de probabilités

2.1. Loi géométrique

La loi géométrique est une situation de répétition d'épreuves de Bernouilli jusqu'à obtenir un succès



- Probabilité de la loi géométrique

On souhaite obtenir k fois le succès lors de n répétitions pour la variable aléatoire X qui suit la loi géométrique G(p)

$$P(X=n)=p\cdot q^{n-1}$$

- Espérance et écart type de la loi géométrique

- Espérance mathématique

$$E(X)=\frac{1}{p}$$

- Variance et l'écart type

$$V(X)=\frac{1-p}{p^2} \qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

2.2. Loi de Poisson

- Approximation de la binomiale par la loi de Poisson

Lorsque $n\geq 30$ $p\leq 0{,}1$ et $np\leq 5$ on dit qu'il y a convergence de loi entre la loi binomiale et la loi de Poisson

- Probabilité de la loi de Poisson

Pour la variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $P(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$$

- Espérance et écart type de la loi de Poisson

- Espérance mathématique

$$E(X)=\lambda$$

- Variance et l'écart type

$$V(X)=\lambda \qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Loi binomiale – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Dans une région pétrolifère, la probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est 0,1.

1) Justifier que la réalisation d'un forage peut être assimilée à une épreuve de Bernoulli.
2) On effectue 9 forages.
   a. Quelle hypothèse doit-on formuler pour que la variable aléatoire X correspondant au nombre de forages qui ont conduit à une nappe de pétrole suive une loi binomiale ?
   b. Sous cette hypothèse, calculer la probabilité qu'au moins un forage conduise à une nappe de pétrole. En donner la valeur à 10^{-3} près.

Exercice 2 corrigé disponible

Un constructeur de composants produit des résistances. La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est égale à 5×10^{-3}.

Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir

a. Exactement deux résistances défectueuses ?
b. Au plus deux résistances défectueuses ?
c. Au moins deux résistances défectueuses ?

Exercice 3 corrigé disponible

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.

On considère un entier positif ou nul n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours consécutifs.

1) Quelle est la loi de X ?
2) Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ? au moins 4 filles ?
3) Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

Exercice 4 corrigé disponible

Indiquer en justifiant si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}\left(n;\frac{1}{3}\right)$ avec $n \geq 2$, alors $p(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
2) Si X suit la loi $\mathcal{B}(5;p)$ et si $p(X=1) = \frac{5}{3}p(X=0)$ alors $p(X=2) = 3p(X=3)$
3) Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale avec $E(X) = 36$ et $\sigma(X) = 3$ alors $p(X = 29) \approx 0{,}01$ à 10^{-2} près.

Exercice 5 corrigé disponible

Un QCM (questionnaire à choix mutiples) est composé de cinq questions numérotées de 1 à 5.
Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte.

Partie A :

Un candidat répond à ce QCM, en cochant, au hasard et de façon indépendante, chacune des 5 questions.
On décide de donner au candidat un point par réponse exacte.
Soit X la variable aléatoire associant aux réponses du candidat la note obtenue sur 5.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne la note maximale ?
3. Etablir la loi de probabilité de X en complétant le tableau ci-dessous en donnant les valeurs exactes, puis arrondies au millième :

valeurs x_i	0					

4. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne plus de la moyenne ?
5. Quelle note le candidat peut-il espérer obtenir (c'est-à-dire quelle note moyenne obtiendrait-il s'il remplissait au hasard un très grand nombre de QCM) ?

Partie B :

On suppose que n candidats (n entier non nul) répondent à ce QCM, et que tous le font au hasard, indépendamment des autres.

1. Exprimer en foncion de n.la probabilité p_n qu'au moins un candidat obtienne la note 5.
2. Pour quelles valeurs de n cet événement se produira-t-il avec une probabilité supérieure à 0,99 ?

Exercice 6

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Un trajet coûte 10€ ; en cas de fraude, l'amende est de 100€. Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

1) On suppose que $p = 0{,}05$.
   a. Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Théo soit contrôlé au plus 2 fois.
   b. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par Théo. Justifier que $Z = 400 - 110X$ puis calculer $E(Z)$.
2) On ne connaît plus la valeur de p.

Pour quelles valeurs de p, la fraude systématique est-elle favorable à Théo ? Justifier.

Exercice 7

Une urne contient trois boules jaunes et deux boules blanches.

On tire successivement et avec remise huit boules de l'urne et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombres de boules blanches obtenues.

Les probabilités seront données à 10^{-4} près.

1. Justifier que la variable aléatoire suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir :
   a. Trois boules blanches.
   b. Au plus quatre boules blanches.
   c. Au moins trois boules blanches.
3. Déterminer $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$.
4. Calculer l'espérance de X et en donner une interprétation.

Exercice 8

Une classe de première S du lycée Jean Mermoz compte 24 élèves dont 10 filles. Leur professeure de mathématiques interroge un élève au début de chaque cours pour corriger le travail fait à la maison mais comme elle est très distraite, elle ne se rappelle jamais quels élèves elle a déjà interrogés. Soit n un entier positif ou nul. Soit X le nombre de filles interrogées lors de n cours consécutifs.

1) Quelle est la loi de probabilités de X ?

2) Quelle est la probabilité qu'exactement 4 filles soient interrogées lors de 10 cours consécutifs ? *On pourra noter cet événement E.*

3) Quelle est la probabilité qu'au moins 3 filles soient interrogées lors de 10 cours consécutifs ? *On pourra noter cet événement F.*

4) Une période de combien de cours consécutifs faut-il considérer pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée durant cette période soit inférieure à 0,001?

5) Une année scolaire comporte environ 150 cours de mathématiques. A combien peut-on estimer le nombre de garçons qui seront interrogées au cours de l'année scolaire en mathématiques?

Exercice 9

Dans un hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle. On suppose que le nombre d'acheteurs parmi cet échantillon suit une loi binomiale.

1) Déterminer le nombre moyen de personnes de cet échantillon qui ont acheté un ordinateur.

2) Quelle est la probabilité, dans cet échantillon, qu'entre 3 et 6 personnes aient acheté un ordinateur ? (on donnera le résultat à 10^{-3})

Exercice 10 corrigé disponible

$\boxed{1}$ On considère un dé ayant la forme d'un tétraèdre régulier non truqué dont les faces sont noté 1, 2, 3, 4.
On lance ce dé et on note le numéro de la face inférieure.

1°) Le but de cette question est de déterminer, à l'aide de la loi binomiale, un intervalle de fluctuation I, au seuil approximatif de 95 %, de la fréquence du numéro 1 dans un échantillon aléatoire de 100 lancers.

Recopier et compléter le modèle de rédaction suivant :

On note X le nombre de fois où l'on obtient le chiffre 1 dans un échantillon aléatoire de 100 lancers.

X suit la loi binomiale de paramètres $n =$ ..... et $p =$ .....

On cherche le plus petit entier naturel a tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$.

On cherche le plus petit entier naturel b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

Pour cela, on utilise la calculatrice afin d'obtenir un tableau de valeurs de la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Avec la calculatrice, on trouve $a =$ .... et $b =$ ....

Déterminer l'intervalle de fluctuation I au seuil de 95 %

2. Programmation en langage Python :
- écrire la fonction **c(n,k)** qui calcule les coefficients binomiaux
- écrire la fonction **cbinomiale(n,p,x)** qui calcule P(X≤x) pour la loi binomiale B(n,p)
- écrire un programme qui calcul l'intervalle I tel que $I[a;b]$ avec $P(X \leq a) > 0,025$ et $P(X \leq b) \geq 0,975$

Exercice 11 **corrigé disponible**

Un photographe animalier se poste là où un chat sauvage passe parfois à l'aube, de façon totalement aléatoire. L'un de ses collègues lui a affirmé qu'au cours des deux mois précédents le félin était passé six fois et il en a conclu que la probabilité d'apparition du chat un matin donné s'établissait à 0,1.

Notre photographe ne peut consacrer que cinq jours à cet affût mais il partira avant s'il a pu photographier le chat. Selon les services de la météo, il pleuvra le deuxième jour. Sinon, il fera beau temps.

1. Quelle est la probabilité de photographier le chat sous la pluie ?
2. Quelle est la probabilité de photographier le chat au cours de ces cinq jours ?

Exercice 12

Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera arrondie à 10^{-3}.

Une petite entreprise emploie 20 personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est 0,05. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres.

On note X la variable aléatoire qui à chaque jour tiré au hasard associe le nombre d'employés absents.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) E_1 : "Un jour donné, il y a exactement trois absents" ;
   (b) E_2 : "Un jour donné, il y a strictement plus de deux absents" ;
   (c) E_3 : "Un jour donné, le nombres d'absents est compris entre trois et six (bornes comprises)"
3. Calculer l'espérance mathématique notée $E(X)$ de la variable aléatoire X.
   Que représente $E(X)$?
4. On approche la loi binomiale de la question 1) par une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la valeur de λ.
   En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des trois événements E_1, E_2 et E_3 de la question 2.
   Vérifier que les résultats obtenus ici sont proches de ceux obtenus à la question 2).

Exercice 13 **corrigé disponible**

(Nombre de désintégrations d'une substance radioactive). Le nombre X de désintégrations d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de 7,5 secondes suit une loi de Poison de paramètre 3,87.

(*a*) Quel est le nombre moyen de désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ? Calculer l'écart-type correspondant.

(*b*) Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de 7,5 secondes.

(*c*) Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 3 et 5 désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ?