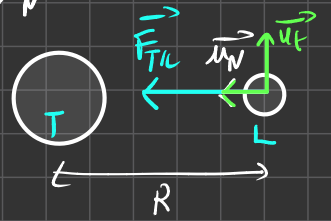
# 31/12/23 - Satellisation et lois de Kepler.

Système : {Lune}.

Réf : Géocentrique supposé galiléen.

Bdf : $\vec{F}_{T/L} = G \times \frac{m_T \times m_L}{d^2} \vec{u}_N$




2ème Loi de Newton :

$$G \frac{m_T \cancel{m_L}}{d^2} \vec{u}_N = \cancel{m_L} \times \vec{a}.$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{G\, m_T}{R^2} \vec{u}_N} + 0\, \vec{u}_t$$

Or dans le repère de Fresnet, on a :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{V^2}{R} \vec{u}_N + \frac{dV}{dt} \vec{u}_t}$$

Par identification, $\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0 \\ \frac{V^2}{R} = \frac{G\, m_T}{R^2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ V est constante.

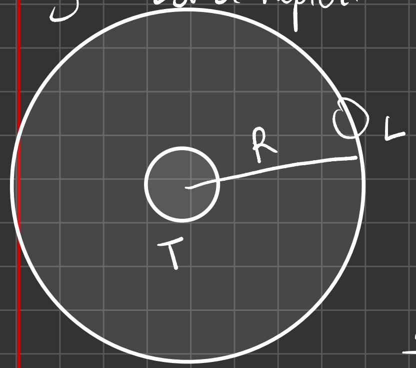
Vitesse de la lune :

$$\frac{V^2}{R} = \frac{G\, m_T}{R^2}$$

$$V^2 = \frac{G\, m_T}{R}$$

$$V = \sqrt{\frac{G\, m_T}{R}}.$$

3ème Loi de Kepler :




$$P = 2 \times \pi \times R.$$

$$T$$

$$V = \frac{2 \times \pi \times R}{T}$$

$$\frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{G\, m_T}{R}}$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \times \frac{4\pi^2 R^2 \times R}{T^2} = \frac{G m_T}{R} \times R \times \frac{1}{4\pi^2}$$

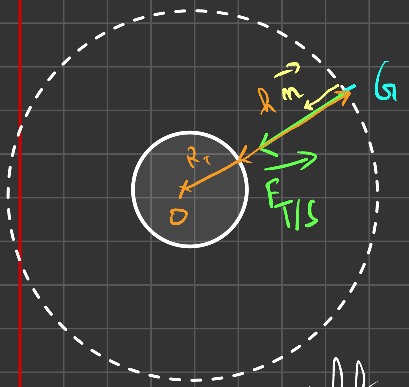
$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G m_T}{4\pi^2}$$

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G m_T}}$$

3ème Loi de Kepler:

# Exercice 1 :

1. a.




b. $\vec{F}_{T/G} = G \dfrac{m_T \times m_{sat}}{(R_T+h)^2} \vec{n}$.

2. a. Le mouvement est décrit dans le référentiel géocentrique.

b. On suppose que ce référentiel est galiléen pour pouvoir appliquer la seconde loi de Newton.

c) Système : {satellite de masse $m_{sat}$}.

Réf : Géocentrique supposé galiléen.

Bdf : $\vec{F}_{T/G} = G \times \dfrac{m_T \times m_{sat}}{(R_T+h)^2} \vec{n}$.

2ème Loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m_{sat} \times \vec{a}$.

$$G \times \frac{m_T \times \cancel{m_{sat}}}{(R_T+h)^2} \vec{n} = \cancel{m_{sat}} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} = G \times \frac{m_T}{(R_T+h)^2} \vec{n}.$$

3. a. Dans le cadre d'une trajectoire circulaire, on a, dans le repère de Frenet :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R_T+h} \vec{n} + \frac{dv}{dt} \vec{u_t}.$$

b. Par identification, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ \dfrac{v^2}{R_T+h} = \dfrac{G m_T}{(R_T+h)^2} \end{cases}$$

$$v^2 = \frac{G m_T}{R_T + h} \qquad \text{Or } R_T + h = R.$$

$$\boxed{v^2 = \frac{G m_T}{R}}$$

4.a. T est le temps nécessaire au satellite pour faire un tour complet autour du centre de la Terre.

Or on sait que $v = \dfrac{2 \times \pi \times R}{T}$

$$v^2 = \left(\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{G m_T}{R}\right)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G m_T}.$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G m_T}}$$

b. $$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \times (6{,}38 \times 10^6 + 23{,}6 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}}$$

$$T = 5{,}16 \times 10^4 \text{ s} = 14{,}3 \text{ h}.$$

1) a) Galileo : $R = R_T + h = 6\,38 \times 10^3 + 23{,}6 \times 10^3$

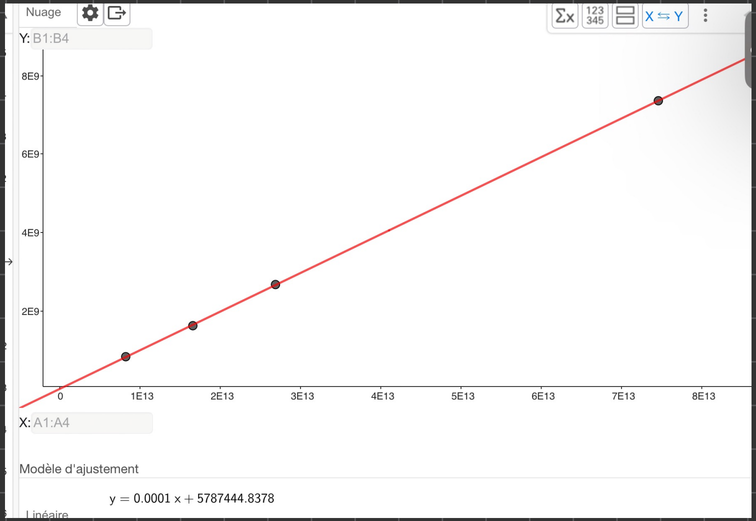
$= 3{,}00 \times 10^4$ km.

$T = 5{,}16 \times 10^4$ s.

$R^3 = 2{,}69 \times 10^{13}$ km$^3$.

$T^2 = 2{,}67 \times 10^9$ s$^2$.

1.b




2.a.

# Mouvement dans un champ de gravitation – Fiche de cours

## 1. Rappels sur les référentiels

### a. Référentiel héliocentrique

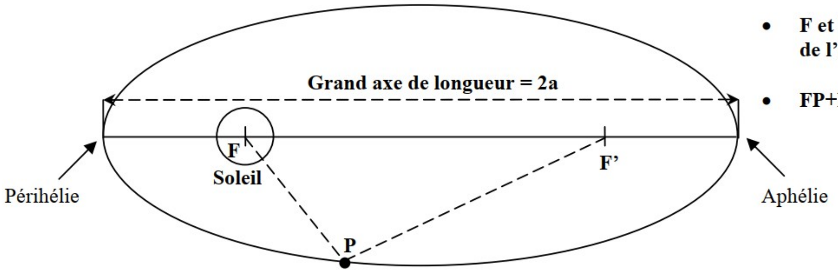
Repère ayant pour origine le centre du Soleil, trois axes dirigés vers trois étoiles fixes et lointaines et associé à une base de temps.

### b. Référentiel géocentrique

Repère ayant pour origine le centre de la Terre, trois axes sont dirigés vers trois étoiles fixes et associé à une base de temps.

## 2. Première loi de Képler : loi des trajectoires

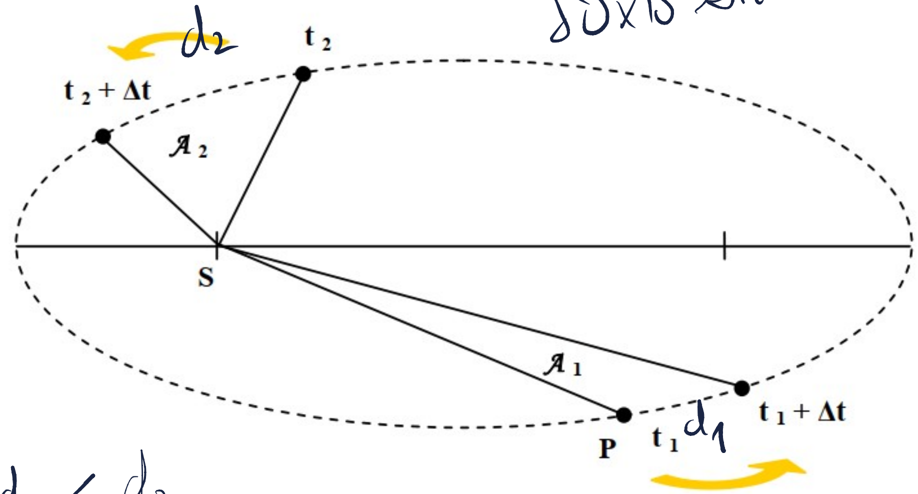
Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'une planète est une ellipse dont l'un des foyers est le centre du Soleil.




- F et F' sont les foyers de l'ellipse
- FP+F'P = 2a

## 3. Deuxième loi de Képler : loi des aires

Le segment de droite reliant le Soleil, à la planète, balaie des aires égales pendant des durées égales.




$50 \times 10^6$ km$^2$.

$$\frac{d_1}{\Delta t} < \frac{d_2}{\Delta t}$$

## 4. Troisième loi de Képler : loi des périodes

Pour les planètes du système solaire, le rapport entre le carré de la période de révolution de la planète et le cube du demi grand axe **a** de l'orbite elliptique est constant :

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

T est la période de révolution en s
a est le demi grand axe en m
k est une constante indépendante de la planète considérée

## 5. Mouvement des planètes et des satellites

### a. Rappel de la gravitation universelle

L'interaction gravitationnelle entre deux corps ponctuels A et B, de masses respectives **$m_A$** et **$m_B$**, est modélisée par des **forces d'attraction gravitationnelle** $\overrightarrow{F_{A/B}}$ et $\overrightarrow{F_{B/A}}$ :

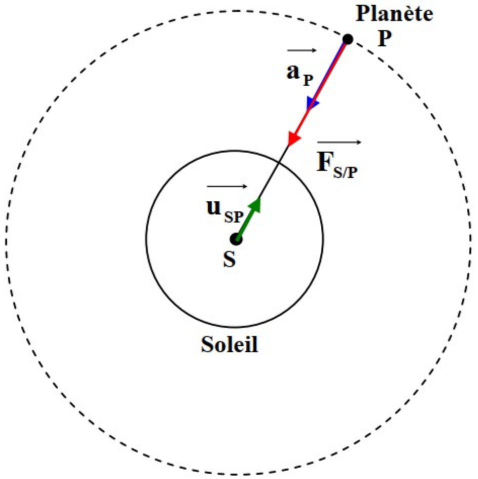
$$\overrightarrow{F_{A/B}}=-\overrightarrow{F_{B/A}}=\frac{G\cdot m_A\cdot m_B}{AB^2}\vec{n}$$

$G=6{,}67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}$ $m_A$ et $m_A$ en kg

$AB$ distance en m entre les deux centres des corps A et B

$\vec{n}$ vecteur unitaire (norme égale à 1) dirigé de A vers B

### b. Mouvement des planètes autour du Soleil




$R=SP$ distance entre le centre de la planète et le centre du Soleil en m

Etudions le système {planète} de centre P de masse **$m_P$**, qui tourne autour du Soleil, de centre S de masse **$M_S$**, dans le référentiel héliocentrique considéré galiléen

Bilan des forces :

- Force gravitationnelle exercée par le Soleil $\overrightarrow{F_{S/P}}$

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\overrightarrow{F_{S/P}}=m_P\cdot\overrightarrow{a_P} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{a_P}=\frac{G\cdot M_S}{R^2}\cdot\vec{n}$$

Propriété de l'accélération :

- radiale
- centripète
- norme $a=\frac{v^2}{R}$

Propriété de la vitesse

- valeur constante
- $v=\sqrt{\frac{GM_S}{R}}$ unité en $m.s^{-1}$

Période de révolution

La période de révolution T (en s) d'une planète autour du Soleil est la durée que met la planète pour effectuer un tour complet autour du Soleil à la vitesse v.

$$T=\frac{2\pi R}{v} \quad \text{ou} \quad T=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}$$

Lien avec la troisième loi de Képler

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM_S}=k$$

## c. Mouvement des satellites autour d'une planète

Méthode 1 :

On étudie le système {satellite} dans le référentiel lié à la planète supposé galiléen et l'on applique la $2^{ième}$ loi de Newton.

Méthode 2 :

On utilise la troisième loi de Képler pour le mouvement d'un satellite autour d'une planète :

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{G M_P}=k$$

## d. Satellites géostationnaires

Un satellite géostationnaire est un satellite :

- immobile pour un observateur terrestre
- qui tourne dans le même sens que celui de la Terre autour du même axe de rotation (axe des pôles)
- qui a une période de révolution T égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même.
- dont l'orbite circulaire est contenue dans le plan équatorial de la Terre
- situé à l'altitude d'environ h = 36 000 km au dessus de la surface terrestre

## e. L'impesanteur

L'impesanteur est caractérisée par l'absence apparente de pesanteur