Les suites numériques

Généralités sur les suites

EXERCICE 1

Pour les suites suivantes, trouver la fonction f associée à la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et calculer les termes de u_1 à u_4

a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n} \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

EXERCICE 2

Pour les suites suivantes, calculer les termes de u_1 à u_5 puis **conjecturer une formule explicite** du terme général. Retrouver alors u_0 à partir de la formule conjecturée puis démontrer la relation donnée entre u_{n+1} et u_n.

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1 + u_n} \end{cases}$

EXERCICE 3

Pour les exercices suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = \dfrac{3n - 2}{n + 1}$ M1)

b) $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$ M2)

c) $u_n = (n - 5)^2, \quad n \geqslant 5$

d) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = u_n - n$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{2^n}{n}$

M1) $U_{n+1} - U_n \geq 0$

$U_{n+1} - U_n \leq 0$

M2) $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$

EXERCICE 4

1) Quelle est la suite (u_n) définie par récurrence dont ce programme calcule le terme u_n.

2) On prend $A = 2$
   a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b) Ecrire ce programme sur votre calculette puis donner une approximation du terme u_{10}.
   c) Que semble calculer la suite (u_n) ?

3) Prenez plusieurs valeur de A, par exemple 3, 4, 9, 25, et indiquer le terme u_{10} qui permet de confirmer votre conjecture. Cette suite s'appelle la suite du Héron.

Variables : N, I entiers et A, U réels
Entrées et initialisation
  Lire A, N
  $1 \to U$
Traitement
  Pour I variant de 1 à N **faire**
    $\dfrac{1}{2}\left(U + \dfrac{A}{U}\right) \to U$
  fin
Sorties : Afficher U

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{A}{U_n}\right) \end{cases}$

$$U_n = \frac{3n-2}{n+1}$$

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

$$U_{n+1} = \frac{3(n+1)-2}{n+1+1} = \frac{3n+3-2}{n+2}$$

$$U_{n+1} - U_n$$

$$(a-b)^2$$

$$U_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}.$$

$$U_{n+1} = \frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}} = \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}}.$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}} = \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

a) $U_{n+1} = 2(n+1)+3 = 2n+2+3 = 2n+5.$

Suite arithmétique

Exercice 5

Pour les exercices suivant préciser si la suite (u_n) est arithmétique ou non

$U_{n+1} = 2(n+1)+3 = 2n+2+3 = 2n+5.$

a) $u_n = 2n + 3$

$U_{n+1} - U_n = 2n+5-(2n+3) = 5-3$

b) $\boxed{u_n = \dfrac{3n+1}{2}}$

c) $\boxed{u_n = n^2 - n}$

d) $\boxed{\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + u_n \end{cases}}$

$U_{n+1} - U_n =$ 3n

$U_{n+1} - U_n = (\dots) \in \mathbb{R}.$

Forme explicite d'une suite arithmétique.

$U_n = f(n).$

Exercice 6

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

a) $u_0 = 1$ et $u_{10} = 31$. Calculer r puis u_{2015}

b) $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$. Calculer r puis u_{20}

c) $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Calculer r puis u_0.

Exercice 7

Avec une suite auxiliaire

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$

a) Calculer $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$.

b) Pour tout n on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Calculer $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$.

c) Prouver que la suite (v_n) est arithmétique. Exprimer alors u_n en fonction de n.

Exercice 8

a) Démontrer que la somme : $1 + 3 + 5 + \cdots + 99$ est le carré d'un naturel.

b) Calculer, en fonction de n, la somme des n premiers naturels impairs
$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$

Exercice 9

La figure ci-dessous, indique le début de la construction de zones colorées que l'on peut prolonger indéfiniment. Tous les triangles de la figure sont équilatéraux.

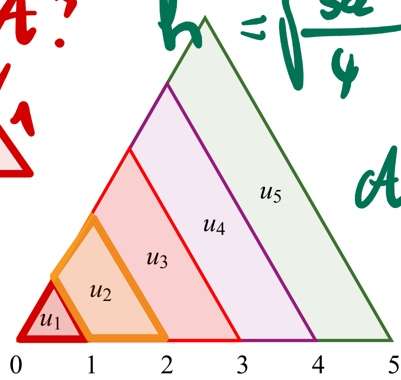
a) Prouver que la suite (u_n) des aires définies par la figure est arithmétique. Quelle est sa raison ?

b) La suite (v_n) des périmètres est-elle arithmétique ?

A ?

$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

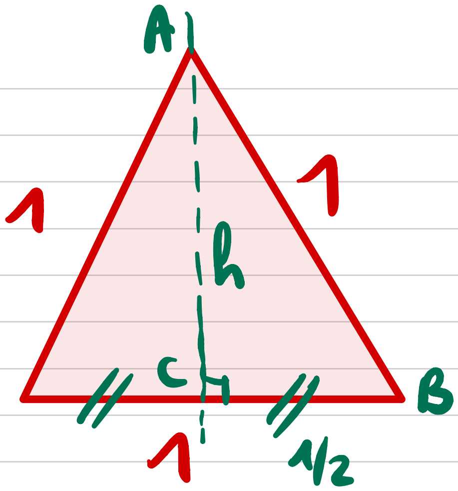
1 1 1 $\frac{\sqrt{3}}{4}$



$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

a a a $a/2$ $a/2$

$h = \sqrt{n^2 - \frac{n^2}{4}} = \sqrt{\frac{3n^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} n$



$$AB^2 = BC^2 + \underbrace{AC^2}_{h^2}$$

$$h^2 = AB^2 - BC^2$$

$$= 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{4}.$$

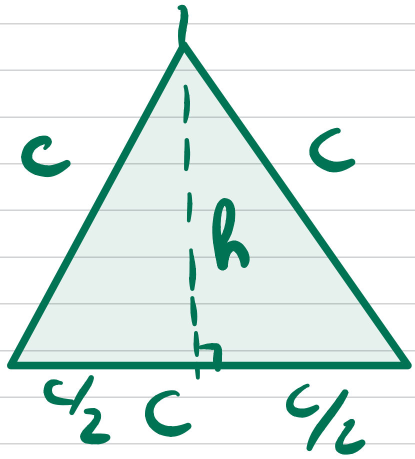
$$= \frac{3}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$A_1 = \frac{B \times h}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$= \frac{1 \times \sqrt{3}}{2 \times 2}$$

$$\boxed{U_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}.}$$



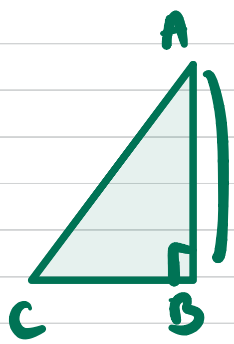
$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

$$= \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4c^2 - c^2}{4}} = \sqrt{\frac{3c^2}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3c^2}}{\sqrt{4}}.$$

$$h = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{c^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\, c}{2}.$$



$$AC^2 = \underbrace{AB^2} + BC^2$$

$$= h^2 + BC^2.$$

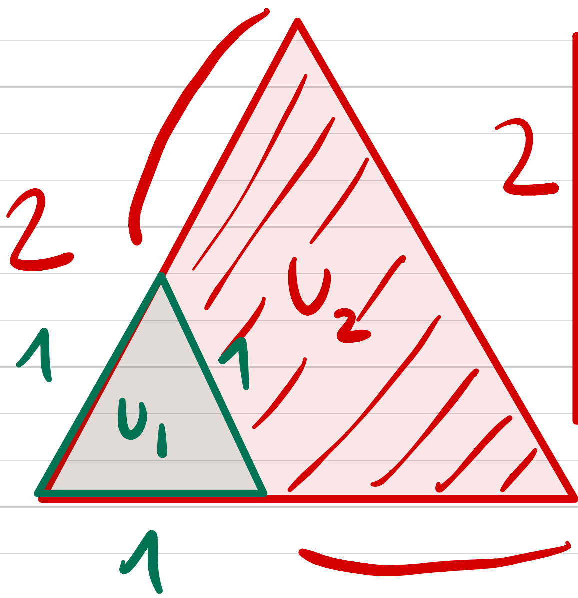
$$h^2 = AC^2 - BC^2$$

$$h = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$A = \frac{c \times \frac{\sqrt{3}}{2} c}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times c^2}{2 \times 2}$$

$$\boxed{A = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2.}$$



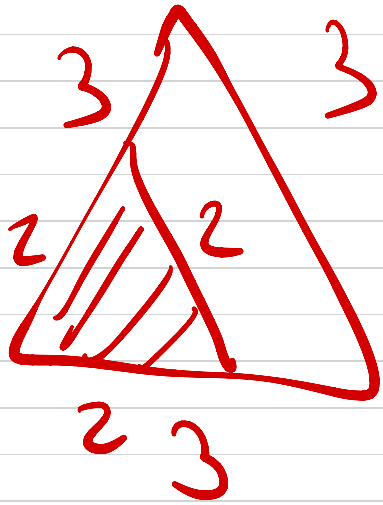
$$\boxed{A_c = \frac{\sqrt{3}}{4} \times c^2.}$$

$$U_2 = A_2 - U_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{U_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}.}$$

$$U_3 = A_3 - A_2$$



$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 9 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4.$$

$$= \frac{9\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{4}$$

$$U_3 = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

$$U_3 - U_2 = \frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4}.$$

$$U_2 - U_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4}.$$

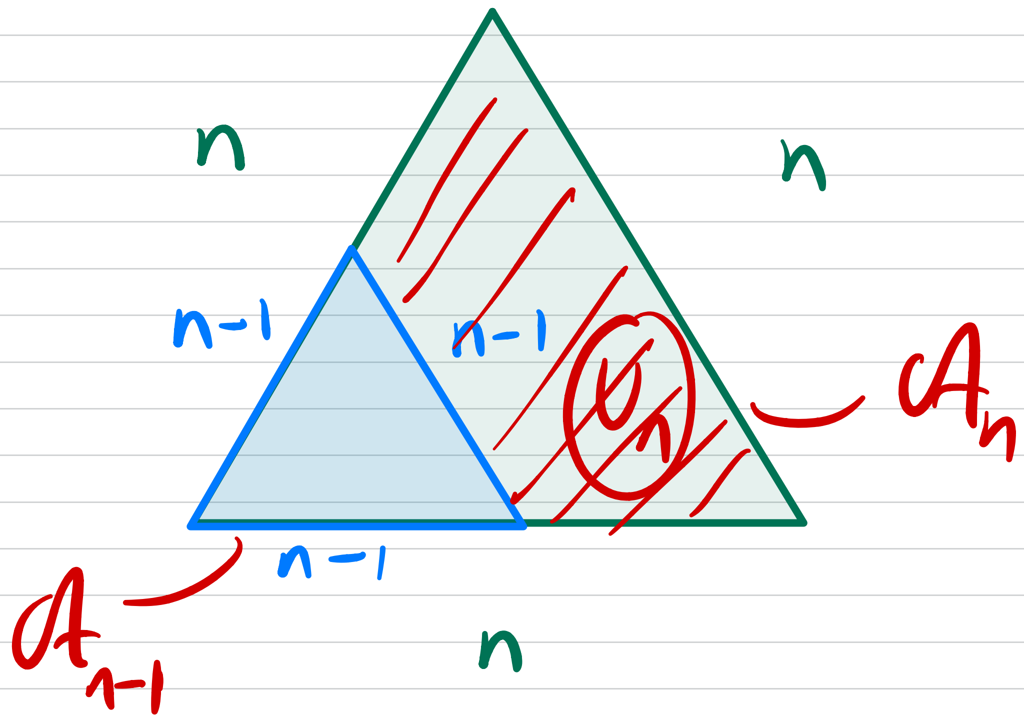
$$U_n = A_n - A_{n-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times n^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} (n-1)^2.$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} n^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times (n^2 - 2n + 1).$$

$$= \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}n^2} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}n^2} + 2n\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\boxed{U_n = \frac{\sqrt{3}}{2}n - \frac{\sqrt{3}}{4}.}$$



$$U_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}(n+1) - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}n + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{U_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}n + \frac{\sqrt{3}}{4}.}$$

Pour trouver la raison :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{\sqrt{3}}{2}n + \frac{\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}n - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}n} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}n} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

· (U_n) est arithmétique.

· Donc la raison est $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\hookrightarrow$ $U_n = U_1 + (n-1)r$

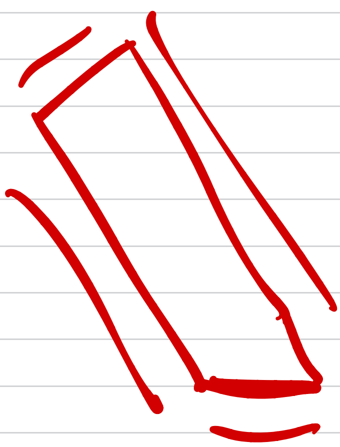
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + (n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}n - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}n$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}n.$$

$$\boxed{U_n = \frac{\sqrt{3}}{2}n - \frac{\sqrt{3}}{4}}.$$



$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} n^2$$

$$U_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} n^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 + \dots + \frac{\sqrt{3}}{4} (n-1)^2 \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} n^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 \right) \right).$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} n^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \left((n-1) \times \frac{1^2 + (n-1)^2}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} n^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \left((n-1) \times \frac{n^2 - 2n + 1 + 1}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} n^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \left((n-1) \times \frac{n^2 - 2n + 2}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} n^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{(n-1)(n^2 - 2n + 2)}{2} \right)$$

$$1 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14.$$

$$\frac{(3-1)(3^2 - 2 \times 3 + 2)}{2} = \frac{2 \times (5)}{2} = 5.$$

EXERCICE 8

a) Démontrer que la somme : $1 + 3 + 5 + \cdots + 99$ est le carré d'un naturel.

b) Calculer, en fonction de n, la somme des n premiers naturels impairs
$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$

a) $S = 1+3+5+\ldots+99$ est le carré d'un naturel : n^2, $n \in \mathbb{N}$.

$S = 1 \underbrace{+}_{+2} 3 \underbrace{+}_{+2} 5 + \ldots + 99$

$= U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_? \longrightarrow ? = 49.$

$U_n = U_0 + nr = 1 + 2n = 2n+1.$

$\begin{cases} r = 2 \\ U_0 = 1 \end{cases}$

$U_? = 99 = 2n+1.$

$\Leftrightarrow 2n = 99 - 1 = 98$

$\Leftrightarrow n = 49.$

$$\boxed{S = \underbrace{\text{nombre de t.}}_{49-0+1 = 50 \text{ termes}} \times \frac{\overbrace{1^{er}\,t}^{1} + \overbrace{\text{dernier } t}^{99}}{2}}$$

$S = 50 \times \frac{99+1}{2}$

$= 50 \times \frac{100}{2}$

$= 50 \times 50 = 50^2.$

EXERCICE 8

$1+3+5 = 9 = 3^2$ $\quad 1+3=4=2^2$

$1+3+5+7=16=4^2.$

a) Démontrer que la somme : $1 + 3 + 5 + \cdots + 99$ est le carré d'un naturel.

b) Calculer, en fonction de n, la somme des $\boxed{n}$ premiers naturels impairs

$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$

$S = 1+3+5+\ldots+(2n-1).$ $\quad U_n = 2n+1.$ nb de t : n.

$S = n \times \frac{\cancel{1}+2n-\cancel{1}}{2} = n^2.$

a) $S = 1+3+5+\ldots+99.$

On remarque que S est la somme des termes de la suite arithmétique de raison $r=2$;

$$\begin{cases} U_n = U_0 + 2r. \\ U_0 = 1. \end{cases}$$

Donc : $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_?$

Pour trouver le $?$:

$U_n = U_0 + nr.$

$99 = U_0 + nr.$

$99 = 1 + 2n.$

$n = \frac{99-1}{2} = \frac{98}{2} = 49.$

$S = 1+3+5+\dots+(2n-1).$

$\rightarrow$ n termes. $\leftarrow$ Nb de termes

$\rightarrow$ 1er terme : $V_0 = 1$.

$\rightarrow$ dernier terme : $2n-1$.

$\rightarrow$ $S = \text{nombre de t.} \times \dfrac{\text{1er t.} + \text{dernier t.}}{2}$

$$= n \times \frac{1 + 2n-1}{2}$$

$$= n \times \frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}}$$

$$= n \times n$$

$$= n^2.$$

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_{49}$$

Nombre de termes : $49 - 0 + 1 = 50$ termes.

$$S = 50 \times \frac{1+99}{2} = 50 \times \frac{100}{2}$$

$$= 50 \times 50$$

$$= 50^2.$$

carré d'un entier.

Exercice 5 :

a) $U_n = 2n+3$.

$U_{n+1} = 2(n+1)+3 = 2n+2+3 = 2n+5$.

$U_{n+1} - U_n = 2n+5 - (2n+3)$.

$= \cancel{2n}+5 - \cancel{2n} - 3$

$= 2 \in \mathbb{R}$.

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = 2$.

Formule explicite de (U_n) : $U_n = U_0 + nr$.

$\begin{cases} U_0 = 2\times 0+3 = 3. \\ r = 2 \end{cases}$

Donc : $\boxed{U_n = 3+2n}$

b) $U_n = \dfrac{3n+1}{2}$

$U_{n+1} = \dfrac{3(n+1)+1}{2} = \dfrac{3n+3+1}{2} = \dfrac{3n+4}{2}$.

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{3n+4}{2} - \dfrac{3n+1}{2} = \dfrac{3n+4-(3n+1)}{2}$

$$= \frac{\cancel{3n}+4-\cancel{3n}-1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \in \mathbb{R}.$$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = \frac{3}{2}$.

Formule explicite : $U_n = U_0 + nr$.

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3\times 0+1}{2} = \frac{1}{2}. \\ r = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc : $\boxed{U_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}n.}$

$\left(= \frac{1}{2}(1+3n).\right)$

c) $U_n = n^2 - n$.

$U_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) = n^2+2n+1 - n - 1.$

$= n^2 + n.$

$U_{n+1} - U_n = n^2+n-(n^2-n) = n^2+n-n^2+n.$

$= 2n$: pas constant (dépend de n).

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite arith.

d) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + U_n. \end{cases}$

Suite définie par récurrence.

$(U_{n+1} = f(U_n))$.

$U_{n+1} = 2 + U_n$

$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = 2 \in \mathbb{R}$.

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arith. de raison $r = 2$ et :

$$\boxed{U_n = 2 + 2n = 2(n+1)}$$

Exercice 6

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- a) $u_0 = 1$ et $u_{10} = 31$. Calculer r puis u_{2015}
- b) $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$. Calculer r puis u_{20}
- c) $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Calculer r puis u_0.

$U_n = U_0 + nr$.

a) $U_0 = 1$

$U_{10} = 31$.

$\hookrightarrow U_{10} = U_0 + 10 \times r$.

Donc : $\underbrace{U_0}_{} + 10 \times r = 31$.

$1 + 10 \times r = 31$.

$10 \times r = 31 - 1$

$10r = 30$

$\boxed{r = 3.}$

$U_n = U_0 + nr = 1 + 3n$

$U_{2015} = 1 + 3 \times 2015 = 6046$.

b) $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{100} = -45. \end{cases}$

$U_n = U_0 + nr.$

$U_{100} = U_0 + 100r.$

$= 5 + 100 \times r.$

Donc : $5 + 100r = -45.$

$100r = -45 - 5 = -50.$

$r = -\frac{50}{100} = -\frac{1}{2}.$

Donc : $\boxed{U_n = 5 - \frac{1}{2}n}$

$U_{20} = 5 - \frac{1}{2} \times 20 = 5 - 10 = -5.$

c) $\begin{cases} U_{17} = 24. \\ U_{40} = 70. \end{cases}$

$U_n = U_0 + nr.$

$\boxed{U_n = U_p + (n-p)r.}$

$$U_n = U_0 + nr.$$
$$= U_4 - \underbrace{4r + nr}.$$
$$= U_4 + (n-4)r.$$

$$U_1 = U_0 + r.$$
$$U_2 = U_0 + 2r.$$
$$U_3 = U_0 + 3r$$
$$U_4 = U_0 + 4r.$$
$$U_0 = U_4 - 4r.$$

$$U_n = U_p + (n-p)r.$$
$$= U_0 + (n-0)r$$
$$= U_0 + nr.$$

$$U_n = U_p + (n-p)r.$$

$$\begin{cases} U_n = U_{17} + (n-17)r. \\ U_n = U_{40} + (n-40)r. \end{cases}$$

$$0 = U_{17} + (n-17)r - [U_{40} + (n-40)r].$$
$$= U_{17} + \cancel{nr} - 17r - U_{40} - \cancel{nr} + 40r.$$

$$0 = U_{17} - U_{40} + 23r.$$

$$0 = 24 - 70 + 23 \times r.$$

Donc : $23r = 46.$

$\hookrightarrow \boxed{r = 2}$

Deuxième méthode :

$$U_n = U_{17} + (n-17)r.$$

$n = 40$:

$$\underbrace{U_{40}}_{70} = \underbrace{U_{17}}_{24} + (40-17)r.$$

$$70 = 24 + 23r.$$

Donc : $23r = 46$

$$\boxed{r = 2}$$

$U_0 = ?$ $\qquad U_{17} = U_0 + 17 \times r.$

Donc : $U_0 = U_{17} - 17 \times r.$

$$= \underbrace{24}_{} - 17 \times \underbrace{2}_{}$$

$$= 24 - 34$$

$$\boxed{U_0 = -10}$$

Donc : $\boxed{U_n = -10 + 2n = 2(-5 + n)}$

Exercice 7

Avec une suite auxiliaire

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout naturel n, $\boxed{u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}}$

$$\frac{1}{\left(\frac{u_n}{1+u_n}\right)} = \frac{1+u_n}{u_n}.$$

a) Calculer $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$.

b) Pour tout n on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = a \times \frac{c}{b}$$

c) Prouver que la suite (v_n) est arithmétique. Exprimer alors u_n en fonction de n.

a) b) maison.

$$v_n = \frac{1}{u_n}.$$

c) $\boxed{v_{n+1} - v_n} = \,?$

$$= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n}.$$

$$= \frac{1+u_n-1}{u_n}$$

$$= \frac{u_n}{u_n} = 1.$$

$v_{n+1} - v_n = 1 \in \mathbb{R}$. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arith. de raison $r = 1$.

Formule explicite :

$$v_n = \underset{1}{v_0} + n\underset{r=1}{r} = \frac{1}{u_0} + n = \frac{1}{1} + n$$

$$\rightarrow \boxed{v_n = n+1.}$$

Exprimer la forme explicite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$v_n = \frac{1}{U_n}.$$

$$\boxed{U_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n+1}.}$$

Exercice 10

a) Calculer la somme de tous les entiers naturels multiples de 3 inférieurs à 1 000.

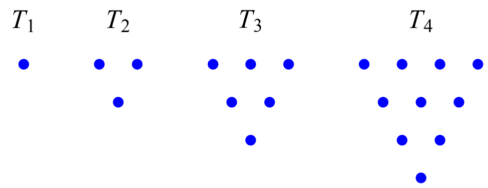
b) Calculer la somme de tous les entiers naturels multiples de 5 inférieurs à 9 999.

c) Calculer la somme de tous les nombres entiers naturels inférieurs à 2 154 ayant 3 comme chiffre des unités.

Exercice 11

Nombres triangulaires

Voici les quatre premiers nombres triangulaires :



a) Représenter et donner les valeurs de T_5 et T_6.

b) Ecrire un algorithme permettant de calculer un nombre triangulaire quelconque T_n, puis à l'aide de votre calculatrice donner les valeurs de T_{12} et T_{60}.

c) Retrouver ces résultats par le calcul.

d) Écrire un algorithme permettant de trouver les valeurs de n telles que : $T_n \geqslant 100$ puis $T_n \geqslant 1000$.

e) Retrouver ces résultats par le calcul.

Exercice 12

(u_n) est une suite arithmétique de raison r, de premier terme u_1 et de n^e terme u_n.
On note $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Les question sont indépendantes les unes des autres.

a) Calculer u_1 et S_{17} lorsque : $u_{17} = 105$ et $r = 2$

b) Calculer u_1 et u_{33} lorsque : $r = -7$ et $S_{33} = 0$

c) Calculer n et u_1 lorsque : $u_n = 14$, $r = 7$ et $S_n = -1176$

$13 \times 6 = 78$

Exercice 13

Des tuyaux sont rangés comme indiqué ci-contre :

1) Quel est le nombre total de tuyaux dans un empilage de 5 couches ? 12 couches ?

2) On a stocké 153 tuyaux, combien y a-t-il de couches ?

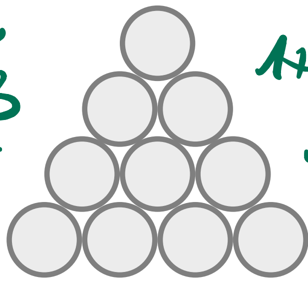
3) Pour ranger 200 tuyaux, combien faut-il de couches ? Combien reste t-il de tuyaux ?

$5 \times \frac{6}{2} = 5 \times 3 = 15$

12 emp. !

$1 + \dots + 12.$

$12 \times \frac{12+1}{2} = 12 \times 13/2$



$1+2+3+4+5 = 15$ tuyaux.

Exercice 14

Nombres pyramidaux

On suppose que la suite des entiers naturels est écrite dans un tableau selon la disposition ci-dessous. On représentera un nombre par le numéro de la ligne qui le contient et par son rang dans la ligne à partir de la gauche. Par exemple, 6. Le nombre 6 est au second rang de la troisième ligne. Dans quelle ligne se trouve le nombre 2 013 ? Quel est son rang dans cette ligne ?

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18	19	20	21	22	23	24	25

L1 L2 L3 L4 L5 m

$n-m=2$
$n-m=4$
$n-m=6$
$n-m=8$
$n-m:+2$

26, r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8 r_9 36

49
64
81
100
121

Exercice 15

Forage

Une entreprise estime le coût d'un forage ainsi :
- le premier mètre coûte 1 000 euros.
- Le second mètre coûte 1 050 euros et chaque mètre supplémentaire coûte 50 euros de plus que le précédent.
- On dispose d'un crédit de 519 750 €.

1) Proposer un programme permettant de connaître la profondeur du forage.

2) On appelle (u_n) la suite telle que $u_1 = 1\,000$ et u_n représente de coût du n^e mètre.
   a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison. Exprimer alors u_n en fonction de n.
   b) Montrer que le nombre de mètres n que l'on peut forer avec le crédit alloué vérifie : $n^2 + 39n - 20\,790 = 0$
   c) Retrouver le résultat de la question 1)

$44^2 = 1936,$
$45^2 = 2025.$

Exercice 16

Un cycliste effectue cinq tours de piste en 2 minutes 40 secondes. Sachant qu'à chaque tour, il a mis une seconde de plus qu'au précédent, déterminer le temps mis pour chaque tour.

On donnera une résolution à l'aide d'une suite puis une résolution arithmétique

$n-m = 2025-1937 = 88.$

$n = 2025$
$m = n_{n-1}+1 = 1936+1$
$= 1937.$

$\boxed{88^{\text{ème}} \text{ ligne}}$

↳ 88+1 rang = 89 rangs.

$\boxed{2025}$

$2013-1937 = \boxed{76^e \text{ rang}}$

030
+31
+32
+33
+34
160
=2m40s

$x+x+1+x+2+x+3+x+4=160$ s.

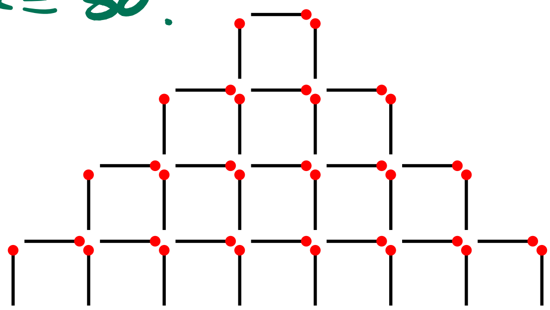
$5x+10=160$

$x=30$.

Exercice 17

Histoire d'allumettes

En posant des allumettes de même longueur sur une table, on réalise une figure plane donnée sur la figure ci-dessous.
Combien d'étages peut-on construire avec 10 440 allumettes ? On proposera un algorithme puis on vérifiera le résultat par le calcul.



Exercice 18

On donne l'algorithme ci-contre.

a) Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de la suite utilisée dans cet algorithme.

b) Préciser le but de cet algorithme puis donner le résultat obtenu.

c) Retrouver ce résultat par le calcul

Variables : I entier et U, S réels
Entrées et initialisation
  $1 \to U$
  $0 \to S$
Traitement
  pour I variant de 1 à 10 **faire**
    $U + 3 \to U$
    $S + U \to S$
  fin
Sorties : Afficher S

Rappels :

$U_0 \xrightarrow{\times q} U_1 \xrightarrow{\times q} U_2$ — raison

Suite géométrique

Exercice 19

Pour les exercices suivants, préciser si la suite est géométrique ou non.

a) $u_n = 5^{n+3}$

b) $u_n = \dfrac{2n+3}{3}$

c) $u_n = 3^n + 3n$

d) $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5u_{n+1} - 2u_n = 1$

Exercice 20

Pour les exercices suivants, (u_n) est une suite géométrique de raison q.

a) $u_0 = 4$ et $q = 5$. Exprimer u_n en fonction de n.

b) $u_4 = 8$ et $q = 2$. Calculer u_2 et u_6.

c) $u_5 = 10$ et $q = -\dfrac{1}{2}$. Calculer u_0 et u_{10}.

d) $u_5 = 64$, $u_7 = 256$, $q > 0$. Calculer q puis u_{10}

e) $u_5 = 486$, $u_7 = 4\,374$, $q > 0$. Calculer u_0 et u_{10}.

EXERCICE 19

Pour les exercices suivants, préciser si la suite est géométrique ou non.

a) $u_n = 5^{n+3}$

b) $u_n = \dfrac{2n+3}{3}$

c) $u_n = 3^n + 3n$

d) $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5u_{n+1} - 2u_n = 1$

a) $U_n = 5^{n+3}$

$U_{n+1} = 5^{n+1+3} = 5^{n+4}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5^{n+4}}{5^{n+3}} = 5^{n+4-(n+3)}$$
$$= 5^{n+4-n-3}$$
$$= 5^{4-3}$$
$$= 5^1 = 5 \in \mathbb{R}.$$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géo. de raison $q = 5$.

et $U_n = \underbrace{U_0}_{5^{0+3} = 5^3 = 125} \times 5^n = 125 \times 5^n$.

b) $U_n = \dfrac{2n+3}{3}$

$$U_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{3} = \frac{2n+2+3}{3} = \frac{2n+5}{3}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2n+5/3}{2n+3/3} = \frac{2n+5}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2n+3}$$

$$= \frac{2n+5}{2n+3} \notin \mathbb{R}.$$

↳ dépend de n.

Donc (U_n) n'est pas une suite géo. (pas constant).

3) $U_n = 3^n + 3n$.

$$U_{n+1} = 3^{n+1} + 3(n+1) = 3^{n+1} + 3n + 3.$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^{n+1}+3n+3}{3^n+3n} = \frac{\cancel{3}(3^n+n+1)}{\cancel{3}(3^{n-1}+3)}.$$

$$= \frac{3^n+n+1}{3^{n-1}+3} \notin \mathbb{R}$$

$$3^n = 3 \times 3^{n-1}.$$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géo.

4)

Exercice 21

Pour les exercices suivants, (u_n) est une suite géométrique de raison q.

a) Pour tout naturel n, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
Tous les termes sont non nuls et sa raison q est positive. Trouver q.

b) (u_n) est une suite géométrique croissante dont les termes sont négatifs. Son premier terme est u_1

1) Que peut-on dire de sa raison ?
2) On sait que $u_1 \times u_3 = \dfrac{4}{9}$ et $u_1 + u_2 + u_3 = -\dfrac{19}{9}$.
Calculer u_1, u_2 et u_3.
3) Calculer u_n en fonction de n.

Exercice 22

Avec une suite auxiliaire

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

b) Pour tout naturel n, on pose $v_n = u_n + 5$.
Calculer v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5.

c) Prouver que la suite (v_n) est géométrique. Exprimer alors u_n en fonction de n.

Exercice 23

Somme de termes

a) Calculer : $S = 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^7$

b) Calculer : $S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \cdots + \dfrac{1}{1\,048\,576}$

c) Calculer : $S = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} - \cdots - \dfrac{1}{6\,561}$

d) Calculer : $S = 1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{100} + \cdots + \dfrac{1}{10^7}$

Exercice 24

(u_n) est une suite géométrique, $u_{10} = 25$ et $u_{13} = 200$.

a) Calculer u_0 et la raison q.

b) Calculer $S = u_{10} + u_{12} + u_{14} + \cdots + u_{20}$

Exercice 25

Problème de loyer

Une personne loue un appartement à partir du 1er avril 2007. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 4 800 € et le locataire s'engage à occuper l'appartement pendant 9 années complètes.

1) **Contrat n°1**

   Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5 % du loyer chaque année.

   a) Calculer le loyer u_1 payé la deuxième année. On appelle u_0 le loyer de la 1re année.

   b) Exprimer u_n - loyer de la $(n+1)^e$ année - en fonction de n. Calculer u_8 (loyer de la 9e année)

   c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat.

2) **Contrat n°2**

   Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 280 euros chaque année.

   a) Calculer le loyer v_1 payé pour la deuxième année. On appelle v_0 le loyer de la 1re année.

   b) Exprimer v_n - loyer de la $(n+1)^e$ année - en fonction de n. Calculer v_8 (loyer de la 9ème année)

   c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat. Quel est le contrat le plus avantageux ?

Exercice 26

1) Vérifier que la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = 2^n - 2n + 2$ n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) a) Prouver que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -2n + 2$ est arithmétique.

   b) Prouver que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 2^n$ est géométrique.

3) Calculer alors la somme : $S = w_0 + w_1 + \cdots + w_{10}$

Limite d'une suite

Exercice 27

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 2u_n}$

a) A l'aide de votre calculatrice, conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n) pour les grandes valeurs de n.
   On prendra comme fenêtre : $X \in [0; 1]$ et $Y \in [0; 0,5]$

b) On pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$. Prouver que la suite (v_n) est arithmétique. Vous donnerez son premier terme et sa raison.

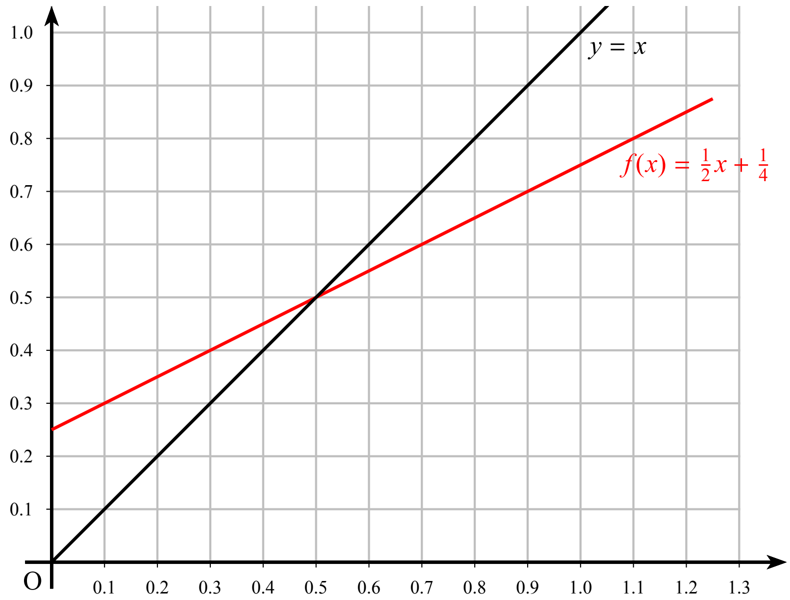
c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 28

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4}$.

1) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur la représentation ci-desssous. Conjecturer alors limite de la suite (u_n).



2) On pose $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.

a) Prouver que la suite (v_n) est géométrique.

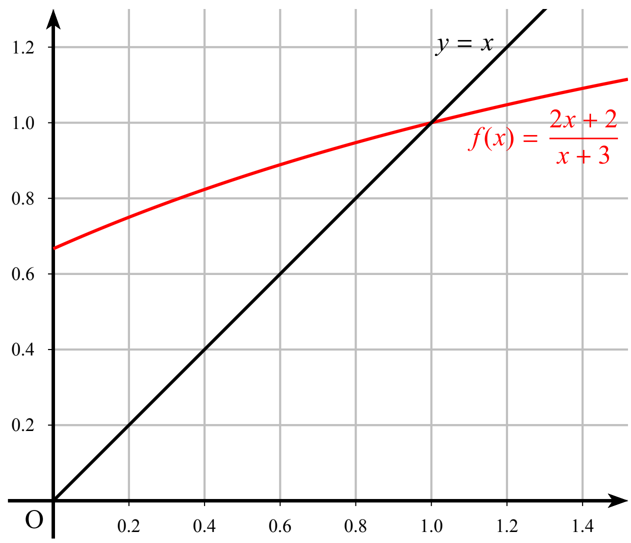
b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 29

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 3}$.

1) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur la représentation ci-desssous. Conjecturer alors limite de la suite (u_n).



2) On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

a) Prouver que la suite (v_n) ainsi définie est géométrique.

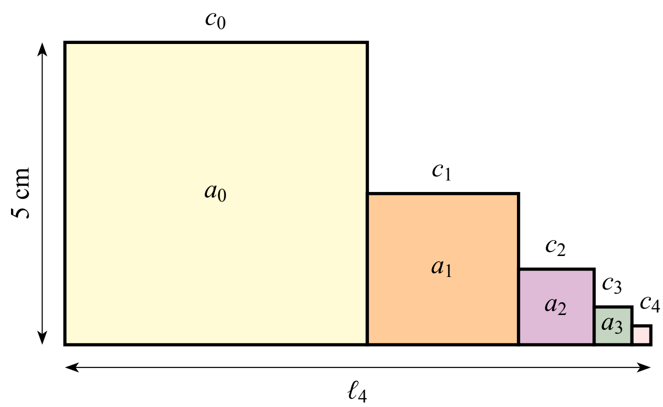
b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Quelle est la limite de (v_n) ? En déduire la limite de (u_n).

EXERCICE 30

Avec des carrés

n carrés sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous (réalisé avec 5 carrés). Le côté d'un carré vaut la moitié du précédent.
Le premier carré a pour côté $c_0 = 5$ cm et pour aire a_0.
On pose $\ell_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n$ et $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

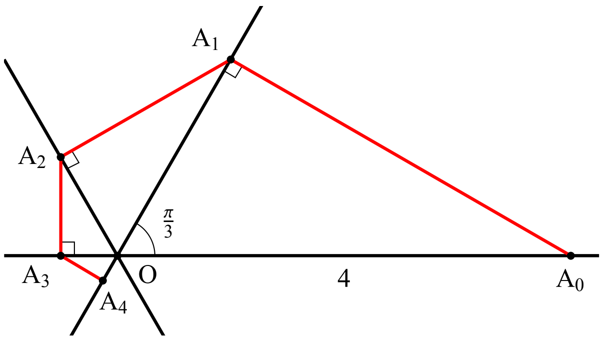


1) Calculer les cinq premiers termes des suites (ℓ_n) et (s_n). On pourra s'aider éventuellement d'un algorithme.
2) a) Exprimer ℓ_n et s_n en fonction de n.
   b) Existe-t-il un entier p tel que $\ell_p \geqslant 10$?
   c) Donner la limite (éventuelle) de chacune des suites (ℓ_n) et (s_n).

EXERCICE 31

Construction géométrique

Les deux droites issues de O font des angles de $\dfrac{\pi}{3}$ et la mesure de OA_0 est 4.

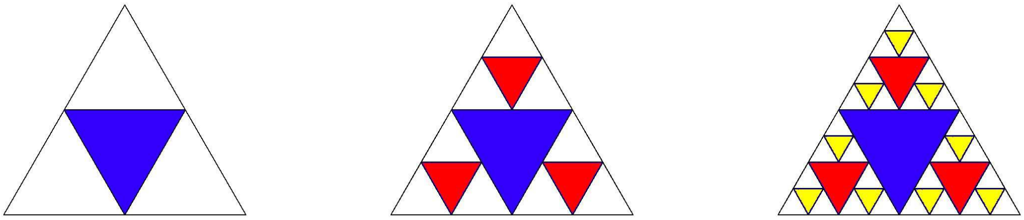


On définit la suite (u_n) par : $u_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$

a) On pose $v_n = A_{n-1}A_n$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et l'on précisera la raison et le premier terme v_1.
b) Calculer u_n en fonction de n.
c) Quelle est la limite de la suite (u_n)

Exercice 32

Les triangles de Sierpinski



Etape 1 Etape 2 Etape 3

On part d'un triangle équilatéral de côté 10.
A chaque étape, on construit dans chaque triangle équilatéral (non colorié), le triangle équilatéral (colorié) ayant pour sommets les milieux des côtés.
On s'intéresse à l'aire S_n et au périmètre P_n de la surface coloriée à la $n^{\text{ième}}$ étape.

1) a) Expliquer pourquoi, quel que soit l'entier n , $S_n \leqslant 25\sqrt{3}$

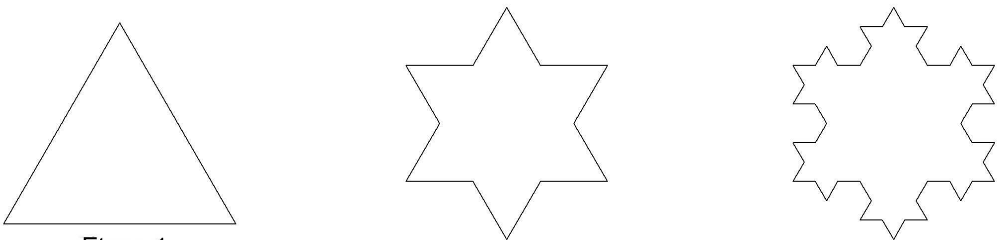
   b) Conjecturer le sens de variation de S_n et de P_n, et leurs limites éventuelles.

2) Exprimer S_n et P_n en fonction de n puis déterminer, si elles existent : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

Exercice 33

Le flocon de Von Koch (1870 - 1934)

Soit un triangle équilatéral de côté a (étape 1). Sur chaque côté, on considère deux points qui partage ce côté en trois partie de même longueur. Sur chaque côté, on obtient ainsi trois segments ; sur le segment central, on construit vers l'extérieur un triangle équilatéral en supprimant le segment central. On obtient un polygone (étape 2). On réitère la processus (étape 3) autant de fois que l'on souhaite.



Etape 1 Etape 2 Etape 3

On note C_n le polygone obtenue à la $n^{\text{ième}}$ étape. On note p_n le périmètre de C_n et A_n l'aire de C_n.

a) Exprimer p_n en fonction de n. La suite (p_n) admet-elle une limite ?

b) Exprimer A_n en fonction de n. La suite (A_n) admet-elle une limite ?

c) Quelle conclusion peut-on donner à ces polygones ainsi formés en ce qui concerne leur aire et leur périmètre.

Exercice 34

Suite récurrentes à deux termes.

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$.

1) a) Déterminer un algorithme permettant de calculer u_n, n étant donné.
   b) Programmer cet algorithme sur votre calculette puis remplir le tableau suivant (on donnera les valeurs à 10^{-4}) :

n	2	5	10	50
u_n				

   c) Conjecturer la limite de la suite.
2) a) Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
3) a) Montrer que : $u_n = 2(1 - 0,5^n) + 1$.
   b) Retrouver la conjecture du 1.c)
4) Déterminer un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier p tel que pour $n \geqslant p$: $|u_n - 3| < 10^{-6}$

Exercice 35

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}, \quad u_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}, \quad \text{et ainsi de suite}$$

a) Calculer les valeurs exactes de : u_1, u_2, u_3.
b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
c) Ecrire un algorithme permettant de calculer u_n en fonction de n. Remplir ensuite le tableau suivant (on donnera les valeurs à 10^{-4}) :

n	5	10	20	50
u_n				

d) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

Exercice 36

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \quad u_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \quad \text{et ainsi de suite}$$

a) Calculer les valeurs exactes de : u_1, u_2, u_3.
b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
c) Ecrire un algorithme permettant de calculer u_n en fonction de n. Remplir ensuite le tableau suivant (on donnera les valeurs à 10^{-4}) :

n	5	10	20	50
u_n				

d) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

EXERCICE 37

Négociation

Pierre essaie de vendre sa vieille voiture 1000 € à Paul. Paul trouve ce prix trop cher et lui propose 500 €. Pierre décide de couper la poire en deux et lui propose alors 750 €. Paul tient alors le même raisonnement et lui propose 625 €. Et ainsi de suite .... Vont-il finir par se mettre d'accord ?

On pose $u_0 = 1000$ la 1re proposition de Pierre et $u_1 = 500$ la 1re proposition de Paul.

a) Exprimer la proposition u_{n+2} en fonction des 2 propositions précédentes u_{n+1} et u_n.

b) Programmer cette suite sur votre calculatrice. Vers quel prix Pierre et Paul vont-il tomber d'accord ?