Exercice 1 : PROBLÈME ÉCONOMIQUE.

1) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0;300]$ par : $f(x) = \frac{1}{10}x^2 - 30x + 2500$.

2) En déduire que $f(x) \geq 250$.

3) Dans une entreprise, le coût total de fabrication de x unités ($x \in [0;300]$) est : $C(x) = \frac{1}{30}x^3 - 15x^2 + 2500x$

Le coût marginal $C_m(x)$ est la dépense occasionnée par la production d'un objet supplémentaire : $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$

En économie, une bonne approximation du coût marginal est :

$$\boxed{C_m(x) \approx C'(x)}.$$

a) Étudier les variations de C.

b) Pour quelle valeur de x le coût marginal est-il minimal ?

3) Le prix de vente unitaire p est une fonction de x définie sur $[0;300]$ par : $p(x) = -\frac{45}{8}x + 2750$ en euros.

a) Calculer la recette totale $R(x)$ pour la vente de x unités.

b) La recette marginale $R_m(x)$ est l'augmentation de recette procurée par la vente d'un objet supplémentaire.

i) Exprimer $R_m(x)$ en fonction de $R(x+1)$ et $R(x)$.

En Économie, une bonne approximation de $R_m(x)$ est :

$$\boxed{R_m(x) \approx R'(x)}$$

Pour quelle valeur de x la recette marginale est-elle égale au coût marginal ?

4) a) Montrer que le bénéfice pour la production et la vente de x unités est : $B(x) = -\frac{1}{30}x^3 + \frac{75}{8}x^2 + 250x$

b) Montrer que le bénéfice est maximal quand la recette marginale est égale au coût marginal.

c) Quel est alors ce bénéfice ?

5) Le coût moyen est $\frac{C(x)}{x}$ pour $x \neq 0$.

Étudier les variations de ce coût moyen. Pour quelle valeur de x est-il minimal ?

Corrigé :

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2}{10}x - 30 = 0{,}2x - 30.$$

$$\text{Sgn}\left(f'(x)\right) = \text{Sgn}\left(0{,}2x - 30\right).$$

$$0{,}2x - 30 > 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}2x > 30. \qquad \frac{30}{\frac{1}{5}} = 30 \times 5.$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x > 150.}$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		150		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	250	$\nearrow$	

$$f(150) = \frac{1}{10} \times 150^2 - 30 \times 150 + 2500 = 250.$$

2) D'après le tableau de variations, le minimum de la fonction f est atteint pour $x = 150$ et vaut

250. Donc : $\boxed{f(x) \geq 250.}$

3)